Teorema. Seja $\{E_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ uma sequência de conjuntos enumeráveis. A união

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

é enumerável.

prova. Como cada conjunto E_n é enumerável podemos escrever os elementos de E_n em uma sequência:

$$E_n = \{x_{nk} : k \in \mathbb{N}\}.$$

Agora montamos uma matriz infinita colocando a i-ésima linha como sendo os elementos de E_i:

$$\begin{matrix}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & \cdots \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & \cdots \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & \cdots \\
x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{matrix}$$

Agora arranjamos os elementos em uma sequência dada pelas diagonais:

$$x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}, \dots$$

ou seja, seguimos o diagrama:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & \cdots \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & \cdots \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & \cdots \\
x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Essa sequência contém todos os elementos de S e ela pode conter elementos repetidos (pois pode ocorrer $E_n \cap E_m \neq \emptyset$).

Assim, como a sequência é enumerável e S é um subconjunto dela segue que S é no máximo enumerável. Como E_1 é infinito e $E_1 \subset S$ segue que S é de fato enumerável ■

<u>Corolário</u>. Suponha que A é no máximo enumerável e, para cada $\alpha \in A$, B_α é no máximo enumerável. Então

$$T := \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$$

é no máximo enumerável.

demonstração (Exercício!)

Teorema. Seja A um conjunto enumerável e seja B_n o conjunto dos n-úplas $(a_1, \dots, a_n)$ onde $a_k \in A$, $1 \leq k \leq n$. Então B_n é enumerável, ou seja,

$$\underbrace{A \times A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ vezes}}$$

é enumerável.

prova. A prova é feita por indução.

· Para $n = 1$ é claro que B_1 é enumerável pois $B_1 = A$.

· Suponha que B_{n-1} é enumerável e vamos provar que B_n é enumerável.

Observe que:

$$B_n = \bigcup_{b \in B_{n-1}} \{(b, a) : a \in A\}.$$

Chame $E_b := \{(b, a) : a \in A\}$, $b \in B_{n-1}$. A função

$$f_b : E_b \longrightarrow A$$
$$(b, a) \longrightarrow a$$

é uma bijeção, logo cada E_b é enumerável. Como, pela hipótese de indução, B_{n-1} é enumerável segue pelo Teorema anterior que:

$$B_n = \bigcup_{b \in B_{n-1}} E_b \text{ é enumerável,}$$

concluindo o que queríamos demonstrar ∎

Corolário. $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável.

prova. Pelo teorema anterior temos que $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ é enumerável. Agora considere a função

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

$$x \longmapsto (m,n): \frac{m}{n} = x, \quad n>0 \text{ e } \frac{m}{n} \text{ é irredutível.}$$

· f é injetora logo $\mathbb{Q} \sim f(\mathbb{Q})$.

Como $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ que é enumerável, segue que $f(\mathbb{Q})$, e portanto $\mathbb{Q}$, é no máximo enumerável. Como $\mathbb{Q}$ é infinito então $\mathbb{Q}$ é enumerável ■

• O seguinte Teorema mostra, em particular, que nem todo conjunto infinito é enumerável.

Teorema. Considere Σ_2 o conjunto de todas as sequências formadas por 0's e 1's. Σ_2 é não enumerável. As vezes denotaremos $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$

prova. Considere $E \subset \Sigma_2$ um subconjunto enumerável de Σ_2. Então, os elementos de E podem ser arranjados em sequência:

$$s_1, s_2, s_3, \ldots$$

Observe que cada $s_i \in E$ é uma sequência de 0's e 1's, então podemos escrever:

$$s_i = (s_{in})_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad s_{in} \in \{0,1\}, \forall n.$$

Organize as sequências em forma de "matriz infinita" como fizemos antes:

$$
\begin{array}{lccccc}
s_1 \to & s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & \cdots \\
s_2 \to & s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & \cdots \\
s_3 \to & s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Vamos construir uma sequência s da seguinte forma.

$$s := (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \text{tal que} \quad x_n = \begin{cases} 0, & \text{se } s_{nn} = 1 \\ 1, & \text{se } s_{nn} = 0 \end{cases}$$

Como $x_n \neq s_{nn}$, $\forall n$ então $s \neq s_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Logo $s \notin E$.

Ou seja, provamos que todo subconjunto enumerável de Σ_2 não é todo o Σ_2 isto é, Σ_2 é não-enumerável ∎

Obs. O processo utilizado na demonstração acima é chamado de diagonal de cantor.

Corolário. $\mathbb{R}$ é não-enumerável.

prova. Considere o conjunto $Z \subset \mathbb{R}$ formado pelos reais $0 < x < 1$ tais que a representação decimal de x tem apenas dígitos 0 e 1, ou seja,
(uma delas)

$$Z := \{ x = 0.x_1x_2x_3\ldots : x_i \in 0 \text{ ou } 1, \ i = 1, 2, 3, \ldots \}.$$

Como $Z \subset \mathbb{R}$, basta provar que Z é não enumerável.

Defina $f : Z \longrightarrow \Sigma_2$ por $f(0.x_1x_2x_3\ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$

É fácil ver que f é uma função bijetora. Logo, $Z \sim \Sigma_2$ o que implica que Z é não enumerável.

Assim, $\mathbb{R}$ é não-enumerável C.Q.D ■

Conceitos básicos de Espaços Métricos

definição (distância) Seja X um conjunto não vazio, uma distância ou métrica em X é uma função $d: X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades

1. $d(p,q) > 0$ se $p \neq q$ e $d(p,p) = 0$;
2. $d(p,q) = d(q,p)$;
3. $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$, $\forall\, r \in X$.

definição. Um conjunto X munido de uma métrica $d: X \times X \to \mathbb{R}$ é chamado de espaço métrico.

Exemplo. $\mathbb{R}^k$ é um espaço métrico com a métrica

$$d(p,q) := \|p-q\| .$$

Se $k=1$ então $d(p,q) = |p-q|$.

prova. De fato, dados $p, q \in \mathbb{R}^k$ temos

(i) Pela definição da norma, $\|p-q\| > 0$ $\forall\, p \neq q$ e $\|p-p\| = \|0\| = 0$.
Logo $d(p,q) > 0$ $\forall\, p \neq q$ e $d(p,p) = 0$.

(ii) $d(p,q) = \|p-q\| = \|-1 \cdot (q-p)\| = |-1| \cdot \|q-p\| = d(q,p)$.

(iii) $d(p,q) = \|p-q\| \leq \|p-r\| + \|r-q\| = d(p,r) + d(r,q)$.

Ou seja, d é de fato uma métrica ■

Observação. Todo subconjunto de um espaço métrico é também um espaço métrico cuja métrica é simplesmente a restrição da métrica do espaço total.

- Em $\mathbb{R}^k$ existem vários conjuntos que são de particular importância.

Definição. Seja d a métrica natural em $\mathbb{R}^k$, ou seja, $d(a,b) = \|b-a\|$

— Em $\mathbb{R}$

- Um segmento (a,b), ou intervalo aberto, é o conjunto:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = \left\{x \in \mathbb{R} : d\left(x, \frac{a+b}{2}\right) < \frac{a+b}{2}\right\}$$

- $[a,b]$ (intervalo fechado) é o cjto:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = \left\{x \in \mathbb{R} : d\left(x, \frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{a+b}{2}\right\}$$

- Intervalos semi-abertos:

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad (a,b] = \{x : a < x \leq b\}.$$

— Em $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$

- Uma bola aberta de centro $x \in \mathbb{R}^k$ e raio $r > 0$ é o cjto de todos os pontos $y \in \mathbb{R}^k$ que distam menos do que r de x, ou seja,

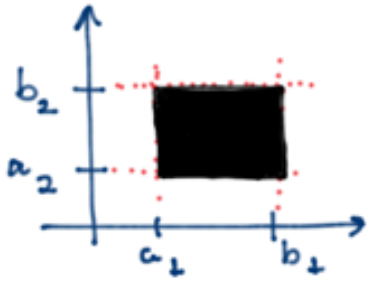
$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^k : d(x,y) < r\}$$

- Uma bola fechada de centro $x \in \mathbb{R}^k$ e raio $r > 0$ é o cjto de pontos $y \in \mathbb{R}^k$ cuja distância até x é menor ou igual a r:

$$B[x,r] = \{y \in \mathbb{R}^k : d(x,y) \leq r\}.$$

• Uma k-célula ou k-retângulo é um conjunto $K \subset \mathbb{R}^k$ da forma:

$$K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_k, b_k] = \{ (x_1, \dots, x_k) : a_i \leq x_i \leq b_i \}$$



Isso é uma 2-célula em $\mathbb{R}^2$.

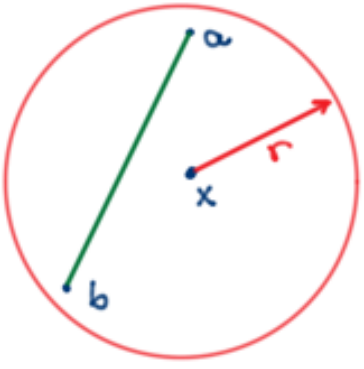
<u>definição</u>. (Conjunto Convexo em $\mathbb{R}^k$)

Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^k$ é dito convexo se para quaisquer $x, y \in E$ o segmento de reta que liga x a y está inteiramente contido em E, isto é,

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in E, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

<u>Exemplo</u>. Bolas abertas são conjuntos convexos.

<u>prova</u>. Considere a bola aberta $B(x,r)$ desenhada assustadoramente perfeita ao lado!



Tome quaisquer $a, b \in B(x,r)$, ou seja,

$$d(a,x) < r \quad \text{e} \quad d(b,x) < r$$

Queremos provar que, para cada $\lambda \in [0,1]$ temos $\lambda a + (1-\lambda) b \in B(x,r)$, isto é, $d(\lambda a + (1-\lambda) b \,;\, x) < r$.

Dado $\lambda \in [0,1]$ qq, pela definição da métrica d em $\mathbb{R}^k$ temos:

$$d(\lambda a + (1-\lambda) b \,;\, x) = \| \lambda a + (1-\lambda) b - x \|$$

Pela desigualdade triangular temos:

$$\|\lambda a+(1-\lambda)b-x\| = \|\underbrace{\lambda(a-x)}_{\lambda a-\lambda x} + \underbrace{(1-\lambda)(b-x)}_{(1-\lambda)b-x+\lambda x}\|$$

$$\leq \|\lambda(a-x)\| + \|(1-\lambda)(b-x)\| =$$

$$= \lambda\|a-x\| + (1-\lambda).\|b-x\| < \lambda.r+(1-\lambda).r = r.$$

Logo $B(x,r)$ é convexa.

Exercício. Mostre que a bola fechada $B[x,r] \subset \mathbb{R}^k$ é convexa e que k-células em $\mathbb{R}^k$ tb são convexos.

– Agora estamos em condição de generalizar esses conceitos facilmente para espaços métricos gerais.

definição. Seja (X,d) um espaço métrico. Todos os ptos e conjuntos mencionados abaixo estão em X.

a) Uma bola aberta (ou vizinhança) de centro p e raio r é o conjunto $B(p,r)$ definido por:

$$B(p,r) = \{x \in X : d(x,p) < r\}$$

b) Uma bola fechada de centro p e raio r é o conjunto $B[p,r]$ dado por

$$B[p,r] = \{x \in X : d(x,p) \leq r\}.$$