Espaços Euclidianos

Definição: Para cada inteiro positivo k, considere $\mathbb{R}^k$ o conjunto de todas as k-uplas ordenadas:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$$

onde $x_1, \dots, x_k$ são números reais que chamaremos de coordenadas de x.

- Os elementos de $\mathbb{R}^k$ são chamados de pontos, ou vetores, especialmente quando $k > 1$.

Sejam $x = (x_1, \dots, x_k)$ e $y = (y_1, \dots, y_k)$ definimos a soma por

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k)$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n)$.

- Com estas operações $\mathbb{R}^k$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

O elemento neutro de $\mathbb{R}^k$ é o vetor $(0, 0, \dots, 0)$, o qual também chamaremos de origem ou vetor nulo.

Produto Interno em $\mathbb{R}^k$: $x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Também podemos usar a notação $\langle x, y \rangle$ para $x \cdot y$.

Norma em $\mathbb{R}^k$. Em $\mathbb{R}^k$ temos uma norma natural que é dada pelo produto interno, ou seja, podemos definir a norma

$$\| x \| := (x \cdot x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \right)^{1/2}$$. Também podemos usar a notação $|x|$.

• O espaço $\mathbb{R}^k$ munido com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e a norma $\|\cdot\|$ definidos assim é chamado de k-espaço euclidiano.

Teorema. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^k$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

a) $\|x\| \geq 0$;

b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

c) $\|\alpha . x\| = |\alpha| . \|x\|$;

d) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$ (Desig. de Cauchy-Schwarz)

e) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

f) $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$

prova. (a) – (d) Exercício.

(e) Por (d) temos: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x . y \rangle + \|y\|^2$$

$$\underset{(d)}{\leq} \|x\|^2 + 2 . \|x\| . \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

Então $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(f) Por (e) temos $\|x - z\| = \|(x-y) + (y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$ ■

Conjuntos finitos, enumeráveis e não enumeráveis

definição: Considere dois conjuntos A e B. Suponha que a cada elemento $x \in A$ está associado algum elemento, que chamaremos $f(x)$, de B. Então esta associação f é chamada de função de A a B.

O conjunto A é chamado domínio de f e o conjunto de valores $\{f(x) : x \in A\} \subset B$ é chamado imagem de f.

Usaremos a notação $f : A \to B$.

definição. Seja $f : A \to B$ uma função:

i) Se $E \subset A$ chamamos $f(E)$ de imagem de E por f,

ii) Se $f(A) = B$ dizemos que f é sobrejetora,

iii) Se $E \subset B$, denotaremos:

$$f^{-1}(E) = \{x \in A : f(x) \in E\}$$

e chamamos este conjunto de pré-imagem de E por f.

Dado $y \in B$ também denotaremos $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$.

iv) f é dita injetora se, para cada $y \in B$ temos que

$$f^{-1}(y) = \emptyset \quad \text{ou} \quad f^{-1}(y) \text{ é um cjto unitário.}$$

v) Se f for injetora e sobrejetora diremos que f é bijetora.

Em 1874 Georg Cantor (o cara da foto) publicou seu primeiro artigo de Teoria dos Conjuntos onde ele estuda conjuntos infinitos e suas propriedades.

O artigo tem apenas 5 páginas e lá ele demonstra sua descoberta revolucionária: $\mathbb{R}$ não é enumerável.

No que segue usaremos a idéia de correspondência 1-1 e o conceito de enumerabilidade, como usados por Cantor, para estudar conjuntos infinitos.

definição. Dados dois conjuntos A e B, diremos que A e B possuem a mesma cardinalidade (ou que eles são equivalentes, ou que estão em correspondência 1-1) se existe uma função bijetora $f: A \longrightarrow B$.

Escreveremos $A \sim B$ para indicar que A e B são equivalentes.

As vezes também denotaremos $A \sim B$ por $\#A = \#B$ ou

$$\text{card}(A) = \text{card}(B).$$

Exercício. Mostre que a relação $\sim$ satisfaz:

i) reflexiva : $A \sim A$

ii) Simétrica : Se $A \sim B$ então $B \sim A$.

iii) Transitiva: Se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$.

definição. Uma relação $\sim$ que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) é chamada relação de equivalência.

Exemplos:

i) $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{7, -1, \pi\}$.

$A \sim B$ pois a função $f: A \to B$ definida por

$f(2) = -1$, $f(3) = \pi$, $f(5) = 7$ é uma bijeção entre A e B.

ii) $A = \{1,2,3,4,\dots\} = \mathbb{N}^*$; $B = \{2,3,4,5,\dots\} = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

. $A \sim B$ pois a função $f: A \to B$ definida por

$$f(n) = n+1 \quad , \text{ é uma bijeção.}$$

definição: Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$J_n = \{1,2,\dots,n\} \subset \mathbb{N} \quad , \text{ e}$$

$$J = \{1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}^* .$$

Seja A um conjunto qualquer. Diremos que.

i) A é finito se $A = \emptyset$ ou se existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $A \sim J_n$

ii) A é infinito se não for finito ;

iii) A é enumerável se $A \sim J$; (As vezes tb chamamos de contável)

iv) A é não-enumerável se A não for finito e nem enumerável

v) A é no máximo enumerável se for finito ou enumerável.

Observação. Se A e B são finitos então é claro que $A \sim B \Leftrightarrow$ A e B tem o mesmo número de elementos. Se A e B não forem finitos a idéia de "nº de elementos" passa a ser bem vaga.

Proposição: $\mathbb{Z}$ é um conjunto enumerável.

prova: Queremos fazer a seguinte associação:

$$\mathbb{Z}: \ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

$$J: \ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

Esta associação é dada pela função:

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

É fácil mostrar que f é bijetora (Exercício) ∎

Observação. Um conjunto finito não pode ser equivalente a um subconjunto próprio. Para ejtes infinitos isto é possível.

definição (Sequência) Uma sequência em um conjunto E é uma função f definida em J com valores em E, isto é,

$$f: J \to E.$$

Seja $x_n := f(n) \in E$, será conveniente denotar a sequência f por

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, (x_n) ou por $x_1, x_2, x_3, \cdots$.

Os elementos x_n são chamados de termos da sequência.

As vezes é conveniente substituir J por $\mathbb{N}$ nesta definição obtendo então uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cujo primeiro termo é x_0.

Teorema. Todo subejto infinito de um conjunto enumerável A é enumerável.

prova. Suponhamos que $E \subset A$ é um conjunto infinito. Coloque os termos de A em sequência (x_n). (Para fazer isto basta tomar qq bijeção $f: \mathbb{N}^* \to A$).

Agora vamos colocar tb os termos de E em sequência.

Construa uma sequência $\{n_k\}$ da seguinte forma:

- tome n_1 o menor inteiro positivo tal que $x_{n_1} \in E$.

- n_2 o menor inteiro positivo tal que $n_2 > n_1$ e $x_{n_2} \in E$.

- Depois de escolhidos $n_1, n_2, \dots, n_k$ escolha n_{k+1} o menor inteiro positivo tal que $n_{k+1} > n_k$ e $x_{n_{k+1}} \in E$.

Agora defina $f(k) = x_{n_k}$. Então f é bijeção entre $\mathbb{N}^*$ e E. ■

Conclusão. Enumerabilidade é o "menor infinito" que se pode ter.

definição: Sejam A e Ω conjuntos, suponha que a cada elemento α de A está associado um conjunto $E_\alpha \subset \Omega$
O conjunto cujos elementos são E_α será denotado por $\{E_\alpha\}$, ou seja, temos uma família (ou coleção) de conjuntos.

a) A união de todos os E_α é denotada por $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ e consiste de todos os ptos x tais que existe $\alpha \in A$ para o qual $x \in E_\alpha$.

- Se A for um cjto de inteiros, por exemplo $A = \{1, 2, 3, \dots, m\}$, denotaremos $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ por $\bigcup_{i=1}^{m} E_i$.

- Se $A = \mathbb{N}^*$ denotamos: $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$.

b) A intersecção de todos os E_α é o conjunto P de todos os pontos x tais que:

$$x \in E_\alpha \,, \ \forall\, \alpha \in A.$$

Denotaremos $P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$

Similarmente às observações da parte (a) também utilizaremos as notações

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \,.$$

- Se $A \cap B = \emptyset$ diremos que A, B são disjuntos.

Proposição. São válidas

i) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

iii) $A \cap (B \cup C) = [A \cap B] \cup [A \cap C]$ (distributiva).

iv) $A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$

v) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

vi) Se $A \subset B$ então $A \cup B = B$, $A \cap B = A$.

demonstração (Exercício!)

Teorema. Seja $\{E_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ uma sequência de conjuntos enumeráveis. A união

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

é enumerável.

prova. Como cada conjunto E_n é enumerável podemos escrever os elementos de E_n em uma sequência:

$$E_n = \{x_{nk} : k \in \mathbb{N}\}.$$

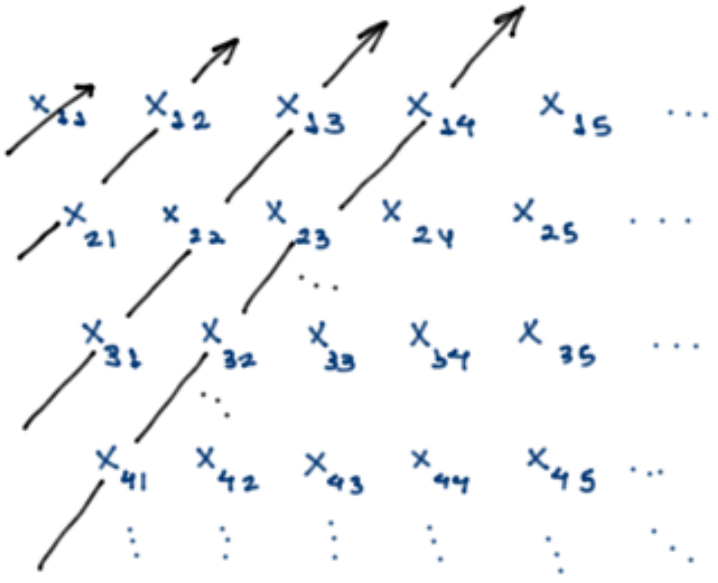
Agora montamos uma matriz infinita colocando a i-ésima linha como sendo os elementos de E_i:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & \cdots \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & \cdots \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & \cdots \\
x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Agora arranjamos os elementos em uma sequência dada pelas diagonais:

$$x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}, \ldots$$

ou seja, seguimos o diagrama:



Essa sequência contém todos os elementos de S e ela pode conter elementos repetidos (pois pode ocorrer $E_n \cap E_m \neq \emptyset$).

Assim, como a sequência é enumerável e S é um subconjunto desta segue que S é no máximo enumerável. Como E_1 é infinito e $E_1 \subset S$ segue que S é de fato enumerável ■

Corolário. Suponha que A é no máximo enumerável e, para cada $\alpha \in A$, B_α é no máximo enumerável. Então

$$T := \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$$

é no máximo enumerável.

demonstração (Exercício!)

Teorema. Seja A um conjunto enumerável e seja B_n o conjunto dos n-úplas $(a_1, \dots, a_n)$ onde $a_k \in A$, $1 \leq k \leq n$. Então B_n é enumerável, ou seja,

$$\underbrace{A \times A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ vezes}}$$

é enumerável.

prova. A prova é feita por indução.

· Para $n = 1$ é claro que B_1 é enumerável pois $B_1 = A$.

· Suponha que B_{n-1} é enumerável e vamos provar que B_n é enumerável.

Observe que:

$$B_n = \bigcup_{b \in B_{n-1}} \{(b, a) : a \in A\}.$$

Chame $E_b := \{(b, a) : a \in A\}$, $b \in B_{n-1}$. A função

$$\begin{aligned} f_b : E_b &\longrightarrow A \\ (b, a) &\longrightarrow a \end{aligned}$$

é uma bijeção, logo cada E_b é enumerável. Como, pela hipótese de indução, B_{n-1} é enumerável segue pelo Teorema anterior que:

$$B_n = \bigcup_{b \in B_{n-1}} E_b \text{ é enumerável,}$$

concluindo o que queríamos demonstrar ■

Corolário. $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável.

prova: Pelo teorema anterior temos que $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ é enumerável. Agora considere a função

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

$$x \longmapsto (m,n): \frac{m}{n} = x \text{ , } n>0 \text{ e } \frac{m}{n} \text{ é irredutível.}$$

· f é injetora logo $\mathbb{Q} \sim f(\mathbb{Q})$.

Como $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ que é enumerável, segue que $f(\mathbb{Q})$, e portanto $\mathbb{Q}$, é no máximo enumerável. Como $\mathbb{Q}$ é infinito então $\mathbb{Q}$ é enumerável ■