Teorema. Subconjuntos compactos de espaços métricos são fechados.

prova. Considere $K \subset X$ um conjunto compacto. Vamos provar que K^c é aberto.

Dado qualquer $q \in K$ defina as bolas abertas:

$$V_q := B(p, d(p,q)/2).$$

$$W_q := B\left(q, \frac{d(p,q)}{2}\right).$$

Como K é compacto e $K \subset \bigcup_{q \in K} W_q$, existem $q_1, \dots, q_n \in K$ tais que:

$$K \subset W_{q_1} \cup W_{q_2} \cup \dots \cup W_{q_n}.$$

Agora defina $W := W_{q_1} \cup \dots \cup W_{q_n}$ e $V = V_{q_1} \cap \dots \cap V_{q_n}$.

Como cada V_{q_i} é aberto então V é um conjunto aberto. Além disso:

$$V \cap W = \emptyset \Rightarrow V \cap K = \emptyset.$$

Como V é aberto, $\exists\, r > 0$ tq $p \in B(p,r) \subset V$, logo p é ponto interior de K^c.

Assim K^c é aberto $\therefore$ K é fechado ■

Teorema. Subconjuntos fechados de conjuntos compactos são compactos.

prova.

Suponhamos que $F \subset K \subset X$ onde K é compacto e F é fechado (relativamente a X).

Considere uma cobertura aberta $\{V_\alpha\}$ de F. Como F é fechado então F^c é aberto e portanto $\{V_\alpha\} \cup \{F^c\}$ é uma cobertura aberta de X e, em particular, de K.

Como K é compacto podemos determinar uma subcobertura finita:

$$K \subset V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \dots \cup V_{\alpha_n} \cup F^c.$$

Como $F \subset K$ então $F \subset V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n} \cup F^c \Rightarrow F \subset V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$, ou seja, F tem subcobertura aberta finita e é assim compacto ■

<u>Corolário</u>. Se F é fechado e K é compacto então $F \cap K$ é compacto.

<u>prova</u>. Como F e K são fechados então $F \cap K$ é fechado. Como K é cpcto e

$$F \cap K \subset K, \text{ segue que } F \cap K \text{ é compacto } ■$$

<u>Teorema</u> Se $\{K_\alpha\}$ é uma coleção de subcjtos compactos de um espaço métrico X tal que a intersecção de toda subcoleção finita de $\{K_\alpha\}$ é não vazia, então

$$\bigcap_\alpha K_\alpha \text{ é não vazia.}$$

<u>prova</u>. Suponha que $\bigcap_\alpha K_\alpha = \emptyset$. Então $X = \bigcup_\alpha K_\alpha^c$. Tome qualquer K_β na coleção $\{K_\alpha\}_\alpha$. Como K_β é compacto e $K_\beta \subset \bigcup_\alpha K_\alpha^c$, existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que: $K_\beta \subset K_{\alpha_1}^c \cup K_{\alpha_2}^c \cup \dots \cup K_{\alpha_n}^c = (\bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i})^c$.

Logo $K_\beta \cap K_{\alpha_1} \cap \dots \cap K_{\alpha_n} = \emptyset$, absurdo ■

Corolário. Se $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de conjuntos compactos (não vazios) então

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} K_n \quad \text{é não-vazio.}$$

prova. Toda subcoleção finita tem interseção não vazia ∎

Teorema. Se E é um subconjunto infinito de um conjunto compacto K, então E tem um ponto de acumulação em K.

prova. Suponha que nenhum ponto de K é pto de acumulação de E. Então para cada $q \in K$ existe $r_q > 0$ tal que:

$$(B(q, r_q) \setminus \{q\}) \cap E = \emptyset.$$

Considere a cobertura aberta $\{B(q, r_q)\}_{q\in K}$ de K. Como K é compacto existem $q_1, q_2, \dots, q_n$ tais que.

$$E \subset K \subset B(q_1, r_{q_1}) \cup \dots \cup B(q_n, r_{q_n}). \quad (*)$$

Em particular, algum dos $B(q_i, r_{q_i})$ tem infinitos ptos de E, contradizendo $(*)$. Logo E de fato tem pto de acumulação em K ∎

Teorema. Se $\{I_n\}$ é uma sequência de intervalos de $\mathbb{R}$, tais que $I_n \supset I_{n+1}$ $n = 1, 2, \dots$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ é não vazio.

prova. Seja $I_n = [a_n, b_n]$, considere $E = \{a_i : i \in \mathbb{N}^*\}$. Então E é não vazio e limitado superiormente. Seja $x = \sup E$. Sejam m e n inteiros positivos quaisquer temos que:

$$a_n \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_m$$

logo $x \leq b_m, \forall m$ e $x \geq a_m, \forall m$. Assim $x \in I_m, \forall m$, ou seja

$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ ■

Teorema. Seja $k \in \mathbb{N}^*$. Se $\{I_n\}$ é uma sequência de k-células tais que: $I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3)$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ é não vazio.

prova. Consideremos:

$$I_n = I_{n,1} \times \dots \times I_{n,k}$$

$$I_{n,j} = [a_{nj}, b_{nj}] \quad , \quad 1 \leq j \leq k$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Para cada j, a sequência $\{I_{n,j}\}$ satisfaz as condições do teorema anterior. Logo $\exists$ x_j tal que:

$$x_j \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{n,j} .$$

Tome $x := (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Então $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ c.q.d ■