(D) Lei distributiva

$$x(y+z) = xy + xz$$

$x, y, z \in F$.

Notação: a) Em qualquer corpo qualmente escreveremos

- $x - y$ no lugar de $x + (-y)$
- $\frac{x}{y}$ no lugar de $x.(1/y)$
- $x + y + z$ no lugar de $(x+y)+z$
- x^2 " " " $x.x$; x^3 no lugar de $x.x.x$, etc...
- nx no lugar de $x + x + \ldots + x$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) $\mathbb{Q}$ é um corpo com as operações usuais de soma e multiplicação (Exercício)

Proposição. Se F é um corpo então são válidas

(a) Se $x + y = x + z$ então $y = z$

(b) Se $x + y = x$ então $y = 0$.

(c) Se $x + y = 0$ então $y = -x$

(d) $-(-x) = x$.

prova:

a) Se $x+y=x+z$ então pelos axiomas de adição temos que:

$$y=0+y=(-x+x)+y=-x+(x+y)=-x+(x+z)$$
$$=(-x+x)+z=0+z=z.$$

Então $y=z$.

b) Se $x+y=x$ então $x+y=x+0$. Pelo item (a) com $z=0$ segue que $y=0$.

c) Se $x+y=0$ então pelos axiomas de adição temos que:

$x+y=x+(-x)$ $\therefore$ pelo item (a) temos $y=-x$.

d) Pelos axiomas da adição temos:

$$-x+(-(-x))=0=-x+x.$$

Pelo item a, $-(-x)=x$ ■

<u>Proposição</u>: Os axiomas da multiplicação implicam:

a) Se $x\neq 0$ e $xy=xz$ então $y=z$

b) Se $x\neq 0$ e $xy=x$ então $y=1$

c) Se $x\neq 0$ e $xy=1$ então $y=1/x$.

d) Se $x\neq 0$ então $1/(1/x)=x$.

demonstração: (Exercício)

Proposição: Seja F um corpo. Para $x, y, z \in F$ são válidos:

a) $0 \cdot x = 0$

b) Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ então $xy \neq 0$.

c) $(-x) \cdot y = -(xy) = x \cdot (-y)$.

d) $(-x)(-y) = xy$.

prova.

a) Observe que, pelos axiomas de distributividade e do elemento neutro da adição temos:

$$0 \cdot x + 0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x = 0 \cdot x + 0.$$

Pelo cancelamento (provado na proposição anterior) temos que: $0 \cdot x = 0$.

b) Suponha que existam $x \neq 0$, $y \neq 0$ tais que $xy = 0$. Então

$$1 = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x \cdot \left(\frac{1}{y}\right) \cdot y = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{y}\right) \cdot x \cdot y = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{y}\right) \cdot 0 = 0$$

usando o item a

caindo em contradição.

(c) & (d) (Exercício). ■

definição: Um corpo ordenado F é um corpo munido de uma relação de ordem $<$ tal que:

i) $x + y < x + z$ se $x, y, z \in F$ e $y < z$.

ii) $xy > 0$ se $x \in F$, $y \in F$, $x > 0$ e $y > 0$.

Nomenclatura. Se F é um corpo ordenado e $x \in F$, dizemos que x é positivo se $x > 0$ e que x é negativo se $x < 0$.

Exemplo. $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado onde as operações de soma e multiplicação são as usuais e a ordem tb, ou seja,

$$p < q \quad \text{se} \quad q - p \in \mathbb{Q}_+ .$$

Prova. Tome $x, y, z \in \mathbb{Q}$ com $y < z$. Então $z - y \in \mathbb{Q}_+$. Mas

$$z - y = (z + x) - (x + y) \quad , \text{ logo } \quad x + y < x + z \text{ , o que prova (i).}$$

Agora tome $x > 0$ e $y > 0$. Então $x - 0 = x \in \mathbb{Q}_+$ e $y - 0 = y \in \mathbb{Q}_+$

Em particular x e y são da forma: $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{m}{n}$, $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$

Logo $x \cdot y = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn} \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow x \cdot y - 0 = x \cdot y \in \mathbb{Q}_+ \therefore xy > 0$. ∎

- Operações Usuais

Proposição: Seja F um corpo ordenado

a) Se $x > 0$ então $-x < 0$ e vice-versa

b) Se $x > 0$ e $y < z$ então $xy < xz$.

c) Se $x < 0$ e $y < z$ então $xy > xz$

d) Se $x \neq 0$ então $x^2 > 0$. Em particular, $1 > 0$.

e) Se $0 < x < y$ então $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

prova. Faremos apenas o item (b) e o restante ficará como exercício.

b) Sejam $x > 0$ e $y < z$. Então

$$y < z \Rightarrow y + (-y) < z + (-y) \Rightarrow 0 < z - y.$$

Como $x > 0$ temos:

$$x \cdot (z - y) > 0 \Rightarrow x \cdot z - x \cdot y > 0.$$

Novamente pelo item (i) temos: $x \cdot z - x \cdot y + x \cdot y > 0 + x \cdot y \Rightarrow x \cdot z > x \cdot y$ ∎

O Corpo dos números reais

Teorema. Existe um corpo ordenado $\mathbb{R}$ que tem a propriedade do menor limitante superior.
Além disso, $\mathbb{R}$ contém $\mathbb{Q}$ como um subcorpo.

· Chamamos tal corpo $\mathbb{R}$ de conjunto dos números reais.

- O seguinte Teorema é um exemplo de como a propriedade do menor limitante superior implica propriedades aritméticas dos reais.

Teorema.

a) Se $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ então existe um inteiro positivo n tal que

$$nx > y.$$

b) Se $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $x < y$, então existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$.

- A parte (a) é geralmente chamada de propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$.

- A parte (b) pode ser enunciada dizendo que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

prova.

a) Consideremos $x \in \mathbb{R}$ e tome $A := \{nx : n \in \mathbb{N}^*\}$. Suponha por absurdo que (a) seja falso. Então y é um limitante superior para A.

Logo A tem supremo. Chame $\alpha = \sup A$. Como $x > 0$ então pelo fato de $\mathbb{R}$ ser um corpo ordenado temos

$$-x < 0 \Rightarrow \alpha - x < \alpha + 0 = \alpha.$$

Logo, como $\alpha = \sup A$, $\alpha - x$ não é limitante superior de A. Assim, existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que: $\alpha - x < m \cdot x \therefore \alpha < m.x + x = (m+1)x$ para algum $m \in \mathbb{N}^*$.

Mas isto implicaria que α não é limitante superior de A, absurdo.

b) Como $x < y$ temos $y - x > 0$. Então existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que:

$$n(y-x) > 1.$$

Aplique (a) novamente para obter inteiros positivos m_1, m_2 tais que:

$$m_1 \cdot 1 > nx \quad , \quad m_2 \cdot 1 > -nx$$

ou seja,

$$-m_2 < n.x < m_1.$$

Então, existe um inteiro m tq $-m_2 \leq m \leq m_1$ tal que:

$$m-1 \leq nx < m.$$

Assim: $nx < m \leq 1 + nx < ny$.

Como $n>0$ segue que: $x < \frac{m}{n} < y$, como queríamos ■

• Vamos agora mostrar a existência de raízes n-ésimas de reais positivos.

Teorema. Para todo número real $x>0$ e todo inteiro $n>0$ existe um, e somente um, real positivo y tal que $y^n = x$.

Este número y será denotado por $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{1/n}$.

prova.

Primeiramente observe que se y_1 e y_2 são tais que: $0<y_1$, $0<y_2$ e $y_1^n = y_2^n$, então $y_1 = y_2$ pois se $0<y_1<y_2$ então por uma proposição anterior temos:

$$y_1^2 = y_1 \cdot y_1 < y_2 \cdot y_1 < y_2^2$$

$$\vdots \longrightarrow \text{Por indução.}$$

$$y_1^n < y_2^n. \quad \text{Absurdo}$$

Similar para $0<y_2<y_1$. Então a unicidade segue. Agora vamos provar a existência.