Exemplo:

1. $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são ordenados com a seguinte relação de ordem:

$$x, y \in \mathbb{Z}, \quad x < y \quad \text{se} \quad y - x \in \mathbb{N}^*$$

2. O mesmo para $\mathbb{Q}$, ou seja,

$$x < y \quad \text{se} \quad y - x \in \mathbb{Q}_+ .$$

definição. (Limitante superior e inferior)

Suponha que S é um conjunto ordenado e $E \subset S$. Se existir $\beta \in S$ tal que $x \leq \beta$, $\forall x \in E$, dizemos que β é um limitante superior ou uma cota superior para E e também que E é limitado superiormente.

Limitantes inferiores são definidos analogamente.

Sup & Inf

definição: Suponha que S é um cjto ordenado, $E \subset S$, e E é limitado superiormente.
Suponha que existe um $\alpha \in S$ com as seguintes propriedades:

i) α é limitante superior de E.

ii) Se $\gamma < \alpha$ então γ não é um limitante superior de E.

Então α é chamado o menor limitante superior de E ou o supremo de E, e nós denotaremos:

$$\alpha = \sup E .$$

definição: Similarmente, suponha que S é um cjto ordenado, $E \subset S$ é limitado inferiormente. Suponha que $\exists\ \beta \in S$ com as seg. propriedades:

i) β é limitante inferior de E,

ii) Se $\gamma > \beta$ então γ não é limitante inferior de E.

Então β é chamado o maior limitante inferior ou o ínfimo de E, e denotaremos

$$\beta = \inf E.$$

Exemplos.

1) Considere $A = \{p \in \mathbb{Q},\ p > 0 \text{ e } p^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$

$$B = \{p \in \mathbb{Q},\ p > 0 \text{ e } p^2 > 2\} \subset \mathbb{Q}.$$

– A é limitado superiormente e o cjto de todos os limitantes superiores de A é exatamente B.

Como B não contém menor elemento então A não tem supremo em $\mathbb{Q}$.

– Analogamente B não tem ínfimo em $\mathbb{Q}$.

2) (Diferença Crucial entre max - min e sup - inf)

$\boxed{\text{sup e inf não precisam necessariamente estar no conjunto.}}$

2.1 $E = \{p \in \mathbb{Q} : 0 < p < 1\}$. $\sup E = 1 \notin E$, $\inf E = 0 \notin \mathbb{Q}$

2.2 $F = \{p \in \mathbb{Q} : 0 \leq p \leq 2\}$, $\sup E = 2 \in F$, $\inf F = 0 \in F$.

* Min e Max se existirem estão no cjto por definição!

c) Considere $E = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \}$. Então $\sup E = 1 \in E$ e

$\inf E = 0 \notin E$.

Exercício: Prove!

definição. Dizemos que um conjunto ordenado S tem a propriedade do menor limitante superior se é válida a seguinte afirmação:

Se $E \subset S$, E é não vazio e limitado superiormente

então $\sup E$ existe em S.

Exemplo. Os exemplos anteriores mostram que $\mathbb{Q}$ não tem a propriedade do menor limitante superior.

· No seguinte Teorema mostraremos que um cjto que tem a propriedade do menor limitante superior tb tem a propriedade do maior limitante inferior.

Teorema. Suponha que S é um cjto ordenado com a propriedade do menor limitante superior. Seja $B \subset S$, B não vazio e limitado inferiormente. Seja L o conjunto de todos os limitantes inferiores de B. Então

$$\alpha = \sup L$$

existe em S e $\alpha = \inf B$. Em particular $\inf B$ existe em S.

prova: Como B é limitado inferiormente, L é não vazio. Agora note que, dado qualquer $x \in B$ temos

$$y \leq x, \ \forall \ y \in L \text{ pela definição de } L.$$

Logo L é limitado superiormente. Pela propriedade do menor limitante superior concluimos que $\alpha = \sup L$ existe em S.

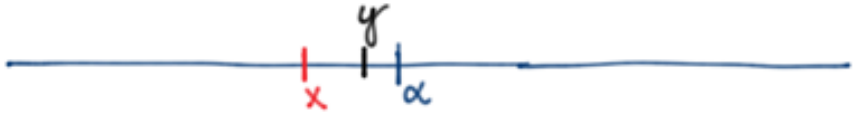
Basta mostrar que $\alpha = \inf B$.

(i) $\alpha \leq x, \ \forall \ x \in B$

prova: Suponha que $\exists \ x \in B$ tal que $x < \alpha$. Como $\alpha = \sup L$ então x não é limitante superior de L $\therefore$ existe $y \in L$ tal que:

$$x < y$$

Mas isso contradiz o fato que L é o conjunto dos limitantes inferiores de B.



(ii) Se $\gamma > \alpha$ então γ não é limitante inferior de B.

prova: Suponha que $\exists \ \gamma \in S$ tal que $\gamma > \alpha$ e $\gamma \in L$.

Como $\gamma \in L$ e $\alpha = \sup L$ então por definição de sup temos $\gamma \leq \alpha$, caindo em contradição.

Então, de fato, $\alpha = \inf B$ ■

Corpos

definição: Um corpo é um conjunto F com duas operações, chamadas adição e multiplicação que satisfazem os seguintes axiomas:

(A) Axiomas da adição

(A1) Se $x \in F$ e $y \in F$, então $x+y \in F$.

(A2) (Comutativa) $x+y = y+x$, $\forall\, x, y \in F$.

(A3) (Associativa) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\, x, y, z \in F$

(A4) (Elemento neutro) F contém um elemento $0 \in F$ tal que

$$x+0 = x, \ \forall\, x \in F.$$

(A5) (Elemento inverso) Para cada $x \in F$ existe um elemento $-x \in F$ tal que

$$x + (-x) = 0.$$

(M) Axiomas de multiplicação

(M1) Se $x \in F$ e $y \in F$, então o produto $xy \in F$

(M2) (Comutativa) $xy = yx$, $\forall\, x, y \in F$.

(M3) (Associativa) $(xy)z = x(yz)$ $\forall\, x, y, z \in F$.

(M4) F contém um elemento $1 \in F$, $1 \neq 0$ tal que $1 \cdot x = x$ $\forall\, x \in F$.

(M5) Se $x \in F$ e $x \neq 0$ então existe um elemento $1/x \in F$ tal que

$$x \cdot (1/x) = 1.$$

(D) Lei distributiva

$$x(y+z) = xy + xz$$

$x, y, z \in F$.

Notação: a) Em qualquer corpo qualmente escreveremos

- $x - y$ no lugar de $x + (-y)$
- $\frac{x}{y}$ no lugar de $x.(1/y)$
- $x + y + z$ no lugar de $(x+y)+z$
- x^2 " " " $x.x$; x^3 no lugar de $x.x.x$, etc...
- nx no lugar de $x + x + \ldots + x$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) $\mathbb{Q}$ é um corpo com as operações usuais de soma e multiplicação (Exercício)

Proposição. Se F é um corpo então são válidas

(a) Se $x + y = x + z$ então $y = z$

(b) Se $x + y = x$ então $y = 0$.

(c) Se $x + y = 0$ então $y = -x$

(d) $-(-x) = x$.