Então, existe um inteiro m tq $-m_2 \leq m \leq m_1$ tal que:

$$m-1 \leq nx < m.$$

Assim: $nx < m \leq 1 + nx < ny$.

Como $n>0$ segue que: $x < \frac{m}{n} < y$, como queríamos ■

• Vamos agora mostrar a existência de raízes n-ésimas de reais positivos.

<u>Teorema</u>. Para todo número real $x>0$ e todo inteiro $n>0$ existe um, e somente um, real positivo y tal que $y^n = x$.

Este número y será denotado por $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{1/n}$.

<u>prova</u>.

Primeiramente observe que se y_1 e y_2 são tais que: $0<y_1$, $0<y_2$ e $y_1^n = y_2^n$, então $y_1 = y_2$ pois se $0<y_1<y_2$ então por uma proposição anterior temos:

$$y_1^2 = y_1 \cdot y_1 < y_2 \cdot y_1 < y_2^2$$

$$\vdots \longrightarrow \text{Por indução.}$$

$$y_1^n < y_2^n. \quad \text{Absurdo}$$

Similar para $0<y_2<y_1$. Então a unicidade segue. Agora vamos provar a existência.

Consideremos $E = \{ t \in \mathbb{R} : t^n < x \}$.

Se $t = \frac{x}{1+x}$ então $0 \leq t < 1$. Então $t^n \leq t < x$. Assim, $t \in E$, e E é não vazio.

Se $t > 1+x$ então $t^n \geq t > x \Rightarrow t \notin E$. Então $(1+x)$ é um limitante superior de E.

Assim existe $\sup E$. Tome $y := \sup E$. Basta mostrar que $y^n = x$.

Vamos fazer uso da seguinte identidade:

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + ba^{n-2} + a^{n-1})$$

Se $0 < a < b$ na desigualdade acima então temos:

$$\boxed{b^n - a^n < (b-a) \cdot n \cdot b^{n-1}} \quad (*)$$

Assuma $y^n < x$. Queremos encontrar $h > 0$ tal que: $(y+h)^n < x$.

Tome $h = \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$ e $0 < h < 1$. Coloque $a = y$ e $b = y+h$

na desigualdade $(*)$. Assim temos:

$$(y+h)^n - y^n < h \cdot n \cdot (y+h)^{n-1} < h\, n \cdot (y+1)^{n-1} = x - y^n$$

Logo $(y+h)^n < x \Rightarrow y+h \in E$ contradizendo o fato que $y = \sup E$.

Agora assuma que $y^n > x$. Tome $k = \dfrac{y^n - x}{n y^{n-1}}$.

Então $0 < k < y$. Se $t \geq y - k$ temos:

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n < k.n.y^{n-1} = y^n - x \Rightarrow t^n > x.$$

Logo $t \notin E$. Segue, portanto, que $(y-k)$ é um limitante superior de E.

Mas $y - k < y$ caindo novamente em contradição.

Então $y^n = x$ c.q.d ■

Corolário. Se a e b são reais positivos e n é um inteiro positivo, então

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n} b^{1/n}.$$

prova. Coloque $\alpha = a^{1/n}$, $\beta = b^{1/n}$. Então, pelo axioma da comutatividade da multiplicação temos:

$$a.b = \alpha^n . b^n = (\alpha . b)^n.$$

Pela unicidade segue que $\alpha . b = (ab)^{1/n}$, ou seja, $a^{1/n} . b^{1/n} = (a.b)^{1/n}$ ■

Números reais estendidos.

definição. O conjunto dos números reais estendidos consiste do corpo dos números reais $\mathbb{R}$ juntamente com dois símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Nós preservamos a ordem original em $\mathbb{R}$ e definimos

$$-\infty < x < +\infty, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Obs. Observe que na reta real estendida, todo subconjunto tem sup e ínfimo, podendo o sup ser $+\infty$ e o ínfimo $-\infty$.

• O conjunto dos reais estendidos não formam um corpo, mas é costumeiro fazer as seguintes convenções:

a) Se $x \in \mathbb{R}$ então

$$x + \infty = +\infty \quad , \quad x - \infty = -\infty \quad , \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 .$$

b) Se $x > 0$ então $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$

c) Se $x < 0$ então $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

O corpo dos números complexos

definição. Um número complexo é um par ordenado (a,b) de números reais (ordenado significa que $(a,b) \neq (b,a)$).

Sejam $x=(a,b)$, $y=(c,d)$ dois complexos, denotaremos $x=y$ para indicar $a=c$ e $b=d$.

Operações. Definimos as operações de soma e multiplicação de dois números complexos por:

$$x=(a,b) \qquad y=(c,d)$$

$$x+y=(a+c,\ b+d), \quad x\cdot y=(ac-bd,\ ad+bc).$$

Notação. O conjunto dos números complexos munidos das operações $+$ e $\cdot$ definidas acima será denotado por $\mathbb{C}$.

Teorema. $\mathbb{C}$ é um corpo com elemento neutro da adição sendo $(0,0)$ e o elemento unitário sendo $(1,0)$.

demonstração: (Exercício!)

Teorema. Para quaisquer números reais a, b nós temos

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0) \quad ; \quad (a,0)\cdot(b,0)=(ab,0).$$

prova. Tome $a, b \in \mathbb{R}$ quaisquer. Pela definição de soma de números complexos segue diretamente que

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0).$$

Pela definição de multiplição de números complexos temos:

$$(x,y).(w,z) := (xw-yz\,;\, xz+yw).$$

Então $(a,0).(b,0) = (ab-0.0\,;\, a.0+b.0) = (ab,0)$ ■

- Este teorema nos sugere que os complexos da forma $(a,0)$ tem as mesmas propriedades aritméticas que os reais. Então identificaremos a por $(a,0)$ com $a \in \mathbb{R}$.

Definição: $i=(0,1)$

Teorema. $i^2=-1$

prova. De fato $i^2=(0,1).(0,1)=(0.0-1.1\,;\, 0.1+0.1)=(-1,0)$

Como identificamos $(-1,0)$ com -1 então: $i^2=-1$ ■

Teorema. Sejam $a,b \in \mathbb{R}$ então $(a,b)=a+b.i$.

prova. $a+b.i = (a,0)+(b,0).(0,1)=$

$$=(a,0)+(b.0-0.1,\; b.1+0.0)=(a,0)+(0,b)=$$

$$=(a,b)$$ ■

definição: Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $z = a + bi$ então o número complexo

$\bar{z} = a - bi$ é chamado de conjugado de z. Os números a e b são chamados respectivamente de parte real e parte imaginária de z e são denotados por:

$$a = \mathrm{Re}(z) \quad , \quad b = \mathrm{Im}(z) .$$

Teorema. Se z e $w \in \mathbb{C}$ então

a) $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z+w}$ b) $\overline{zw} = \bar{z} . \bar{w}$ c) $z + \bar{z} = 2 . \mathrm{Re}(z)$

$z - \bar{z} = 2 . \mathrm{Im}(z)$.

d) Se $z \neq 0$ então $z . \bar{z}$ é um número real positivo.

prova: (a), (b) e (c) – Exercício

d) Tome $z = a + bi$. Então $\bar{z} = a - bi$ e, como $\mathbb{C}$ é um corpo, temos:

$$z . \bar{z} = (a+bi) . (a-bi) = a^2 - a.b.i + b.a.i - b^2 . i^2 =$$

$$= a^2 + b^2 \in [0, +\infty)$$

e $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ ■

definição (Valor absoluto)

Se $z \in \mathbb{C}$, definimos o valor absoluto $|z|$ por: $|z| := (z . \bar{z})^{1/2}$.

Observação importante: Se $x \in \mathbb{R}$ então $\bar{x} = x$ $\therefore |x| = (x.x)^{1/2} = \sqrt{x^2}$
logo $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$.

Teorema. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Então:

a) $|z| > 0$ a menos que $z = 0$, $|0| = 0$,

b) $|\bar{z}| = |z|$

c) $|zw| = |z| . |w|$

d) $|Re(z)| \leq |z|$

e) $|z+w| \leq |z| + |w|$

Exercício

prova. Provaremos apenas (e).

Tome $z, w \in \mathbb{C}$. Então: $|z+w|^2 = (z+w).\overline{(z+w)} =$

$$= (z+w).(\bar{z}+\bar{w}) =$$

$$= z.\bar{z} + z.\bar{w} + w.\bar{z} + w.\bar{w}$$

Mas sabemos que: $z.\bar{z} = |z|^2$, $w.\bar{w} = |w|^2$ e que $z.\bar{w} = \overline{(w.\bar{z})}$, logo por um resultado anterior temos:

$$z.\bar{w} + w.\bar{z} = 2.Re(z.\bar{w})$$

Assim

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2.Re(z.\bar{w}) + |w|^2. \quad (*)$$

Por (d) temos $|Re(z.\bar{w})| \leq |z.\bar{w}| \overset{(b)}{=\!=} |z|.|w|$. Então em $(*)$ temos

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2.|z|.|w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2$$

Portanto: $|z+w| \leq |z| + |w|$ ∎

Notação. Sejam $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ denotaremos: $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \dots + x_n$.

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Sejam $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ números complexos, então

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j} \right|^2 \leq \sum |a_j|^2 \cdot \sum |b_j|^2$$

prova. Tome

$$A := \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \quad , \quad B := \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \quad , \quad C := \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}$$

- Se $B = 0$ então $b_j = 0 \ \forall \ 1 \leq j \leq n$ e aí $C = 0$ e a igualdade segue.

- Assuma que $B > 0$. Assim temos:

$$\sum |Ba_j - Cb_j|^2 = \sum (Ba_j - Cb_j)(B\overline{a_j} - \overline{C} \cdot \overline{b_j}) =$$

$$= \sum (B^2 \cdot |a_j|^2 - Ba_j \cdot \overline{C}\overline{b_j} - B\overline{a_j} \cdot C \cdot b_j + |C|^2 \cdot |b_j|^2) =$$

$$= B^2 \cdot A - B\overline{C} \cdot C - B \cdot C \cdot \overline{C} + |C|^2 \cdot B = B^2 A - 2 \cdot B|C|^2 + B|C|^2$$

$$= B^2 \cdot A - B \cdot |C|^2 = B(AB - |C|^2).$$

Como $0 \leq \sum |Ba_j - Cb_j|^2$ então temos $B(AB - |C|^2) \geq 0$.

Como $B > 0$ então $AB - |C|^2 \geq 0 \ \therefore \ |C|^2 \leq A \cdot B$ ∎

Espaços Euclidianos

definição: Para cada inteiro positivo k, considere $\mathbb{R}^k$ o conjunto de todas as k-uplas ordenadas:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$$

onde $x_1, \dots, x_k$ são números reais que chamaremos de coordenadas de x.

- Os elementos de $\mathbb{R}^k$ são chamados de pontos, ou vetores, especialmente quando $k > 1$.

Sejam $x = (x_1, \dots, x_k)$ e $y = (y_1, \dots, y_k)$ definimos a soma por

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k)$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n)$.

- Com estas operações $\mathbb{R}^k$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

O elemento neutro de $\mathbb{R}^k$ é o vetor $(0, 0, \dots, 0)$, o qual também chamaremos de origem ou vetor nulo.

Produto Interno em $\mathbb{R}^k$: $x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Também podemos usar a notação $\langle x, y \rangle$ para $x \cdot y$.

Norma em $\mathbb{R}^k$. Em $\mathbb{R}^k$ temos uma norma natural que é dada pelo produto interno, ou seja, podemos definir a norma

$$\|x\| := (x \cdot x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \right)^{1/2}$$

. Também podemos usar a notação $|x|$.

• O espaço $\mathbb{R}^k$ munido com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e a norma $\|\cdot\|$ definidos assim é chamado de k-espaço euclidiano.

<u>Teorema</u>. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^k$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

a) $\|x\| \geq 0$;

b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

c) $\|\alpha . x\| = |\alpha| . \|x\|$;

d) $\| \langle x, y \rangle \| \leq \|x\| . \|y\|$ (Desig. de Cauchy-Schwarz)

e) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

f) $\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$

<u>prova</u>. (a) – (d) Exercício.

(e) Por (d) temos: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x . y \rangle + \|y\|^2$$

$$\underset{(d)}{\leq} \|x\|^2 + 2 . \|x\| . \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Então $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(f) Por (e) temos $\|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$ ■