Análise I - MA502, Introdução à Análise-MM202
Primeira Lista

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$ prove que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(ad + bc)}{bd}$$

e

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}.$$

2. Prove que

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + ... + x^n$$

para todo $x \neq 1$.

3. Mostre que se $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ e $x \notin \mathbb{Q}$ então $r + x \notin \mathbb{Q}$ e $r \cdot x \notin \mathbb{Q}$.

4. Prove que $(1 + x)^n \geq 1 + nx + [n(n-1)/2]x^2$ se $x \geq 0$.

5. Para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$, prove que $(1 + x)^{2n} > 1 + 2nx$.

6. Prove que $|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |a| < |b| + \varepsilon$.

7.

a) Sejam $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ números reais. Demonstre que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right),$$

com igualdade se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_i = \lambda y_i$, $1 \leq i \leq n$, ou $y_1 = ... = y_n = 0$.

b) Sejam a, b, c números reais positivos, mostre que

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \leq \left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right).$$

c) Sejam $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ números reais positivos tais que $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Prove que

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+...+\frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{2}$$

d) Seja ABC um triângulo qualquer. Dado um ponto P no interior de ABC denote por D, E e F respectivamente os pés das alturas do ponto P com respeito aos lados BC, AC e AB. Determine P de forma que a expressão

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF} \tag{0.1}$$

assuma valor mínimo.

e) No item (d), denote por s e R o perímetro e a área de ABC respectivamente. Determine um limitante inferior para (0.1) em termos de R e s.

8. Prove que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

9. Mostre que não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{3} = r$. O mesmo para 24, ou seja, mostre que $\sqrt{24} \notin \mathbb{Q}$.

10. Sejam $A \subset B \subset \mathbb{R}$ não vazios e limitados. Mostre que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

11. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ não vazios, B é limitado superiormente e A e B satisfazem a propriedade: se $a \in A$ e $b \in B$ então $a \leq b$. Mostre que: $\sup A \leq \inf B$. Enuncie e demonstre um resultado análogo para o inf.

12. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ não vazios limitados.

1. Mostre que $A \cup B$ e $A \cap B$ são limitados;

2. Diga se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas justificando a resposta (isto é, dando um contra-exemplo se for falsa ou provando se for verdadeira):

   - $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$,

- $\sup(A \cap B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$,
- $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$,
- $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$.

13. Seja $A \subset \mathbb{R}$ não vazio limitado superiormente. Dado $c > 0$ defina $c \cdot A := \{c \cdot a : a \in A\}$.

a) Mostre que $c \cdot A$ é limitado superiormente;

b) Prove as identidades: $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ e $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf(A)$.

Enuncie e demonstre um resultado análogo para $c < 0$.

14. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ não vazios limitados.

1) Mostre que $A + B$ é limitado;

2) Neste caso, prove que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

e

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

15. (Verdadeiro ou falso) Para cada uma das afirmações demonstre (caso for verdadeira) ou dê um contra-exemplo caso for falsa.

a) Se $A, B \subset \mathbb{R}$ são limitados então o conjunto $A \cdot B := \{a \cdot b : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ é limitado e

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

b) Para quaisquer conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ temos

$$\inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B) \quad \text{e} \quad \sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

16. Diz-se que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada superiomente quando sua imagem $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ é um conjunto limitado superiormente. Então definimos o sup de f por

$$\sup f := \sup\{f(x) : x \in X\}.$$

Prove que se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são limitadas superiormente o mesmo ocorre com a soma $f + g : X \to \mathbb{R}$ e tem-se $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$. Dê um exemplo com $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$. Enuncie e prove um resultado análogo para inf.

17. Dadas as funções $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ limitadas superiormente, prove que o produto $fg : X \to \mathbb{R}^+$ é uma função limitada (superiormente e inferiormente) com

$$\sup(fg) \leq \sup f \cdot \sup g \quad \text{e} \quad \inf(fg) \geq \inf f \cdot \inf g.$$

Dê exemplos onde as desigualdades são estritas.

18. Dadas as funções $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ limitadas superiormente, prove que $\sup(f^2) = (\sup f)^2$ e $\inf(f^2) = (\inf f)^2$.

19. Dado $k \geq 0$ um número real. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{(x + k)^2}{x^2 + 1}.$$

Prove que f é limitada superiormente por $k^2 + 1$.