Matemática IV - MA 044
Sétima Lista - Parte 1

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1 Resíduos

1. Encontre o resíduo $z = 0$ da função

a) $\frac{1}{z+z^2}$;

b) $z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$;

c) $\frac{z-\text{sen}(z)}{z}$.

2. Use o Teorema dos resíduos de Cauchy para calcular o valor da integral de cada uma das funções ao redor do círculo $|z| = 3$ no sentido positivo:

a) $\frac{e^{-z}}{z^2}$;

b) $\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$;

c) $z^2 e^{\frac{1}{z}}$;

d) $\frac{z+1}{z^2-2z}$.

3. Utilize resíduos no infinito para calcular a integral de cada uma das seguintes funções ao redor do círculo $|z| = 2$ orientado no sentido positivo:

a) $\frac{z^5}{1-z^3}$;

b) $\frac{1}{1+z^2}$;

c) $\frac{1}{z}$.

4. Seja C o círculo $|z| = 1$, orientado no sentido anti-horário, use os seguintes passos para mostrar que

$$\int_C e^{z+\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

a) Utilize a série de MacLaurin de e^z para calcular a série de $e^{z+\frac{1}{z}}$ e depois integre termo a termo para obter:

$$\int_C e^{z+\frac{1}{z}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_C z^n e^{\frac{1}{z}} dz.$$

b) Aplique o teorema dos resíduos para calcular as integrais do lado direito do item (a) e conclua.

5. Defina os três tipos de singularidades isoladas (polo, singularidade removível, singularidade essencial) e apresente um exemplo de cada tipo. Justifique o porque as singularidades removíveis tem esse nome.

6. Em cada caso, escreva a parte principal da função em sua singularidade isolada e determine se esta singularidade é um polo, é removível ou se é essencial.

a) $ze^{1/z}$;

b) $\frac{z^2}{1+z}$;

c) $\frac{\text{sen}(z)}{z}$;

d) $\frac{\cos(z)}{z}$;

e) $\frac{1}{(2-z)^3}$.

7. Mostre que o ponto singular de cada uma das seguintes funções é um polo. Determine a ordem m daquele polo e o resíduo correspondente.

a) $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$;

b) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$.

8. Escreva a função

$$f(z) = \frac{8a^3z^2}{(z^2+a^2)^3}, \quad (a > 0)$$

na forma

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-ai)^3}.$$

Determine $\phi(z)$, justifique o porque $\phi(z)$ tem expansão de Taylor ao redor de $z = ai$ e use isto para calcular a parte principal de f ao redor do ponto $z = ai$.

9. Em cada caso, mostre que cada singularidade isolada da função é um polo. Determine a ordem m de cada polo e encontre o valor do resíduo nele.

a) $\frac{z^2+2}{z-1}$;

b) $\left(\frac{z}{2z+1}\right)^3$;

c) $\frac{e^z}{z^2+\pi^2}$.

10. Mostre que

a) $\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z^{1/4}}{z+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad (|z| > 0, 0 < \arg z < 2\pi)$;

b) $\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{\operatorname{Log} z}{(z^2+1)^2} = \frac{\pi+2i}{8}$;

c) $\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z^{1/2}}{(z^2+1)^2} = \frac{1-i}{8\sqrt{2}}, \quad (|z| > 0, 0 < \arg z < 2\pi)$.

11. Determine o valor da integral

$$\int_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz,$$

onde C é o círculo:

a) $|z| = 2$ orientado positivamente ;

b) $|z+2| = 3$ orientado positivamente.

12. Enuncie e demonstre o Teorema dos Resíduos de Cauchy.

13. Demonstre o Teorema sobre o cálculo de resíduos em polos.