Matemática IV - Avaliação 2

Prof. Gabriel Ponce

Nome: RA:

1	2	3	4	5	6	B-1	B-2	Total

Instruções:

- Coloque o nome em **TODAS** as folhas;
- Não esqueça de verificar as hipóteses dos teoremas antes de aplica-los;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da atividade.

1 Gabarito

Escolha o problema 1 **OU** 2**.**

Problema 1**:** (2.5) Seja z o valor principal de $(i+1)^i$, calcule o conjunto $\log z$.
Solução: Como z é o valor principal de $(1+i)^i$ então temos que $z = e^{i\,\mathrm{Log}(1+i)}$. Agora sabemos que

$$\mathrm{Log}(1+i) = \mathrm{Log}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i.$$

Assim temos

$$z = \exp\left(i\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i\right)\right) = \exp\left(\left(-\frac{\pi}{4} + i\ln\sqrt{2}\right)\right) = e^{-\frac{\pi}{4}}e^{i\ln\sqrt{2}}.$$

Finalmente concluímos que

$$\begin{aligned}\log z = \log(e^{-\frac{\pi}{4}}e^{i\ln\sqrt{2}}) &= \ln(e^{-\frac{\pi}{4}}) + \left(\ln\sqrt{2} + 2n\pi\right)i \\ &= -\frac{\pi}{4} + \left(\ln\sqrt{2} + 2n\pi\right)i, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Problema 2: (2.5) Seja f uma função complexa, analítica em um domínio D. Suponha que $f'(z) = 3$ para todo $z \in D$ e que $f(0) = 1$. Determine f.
Solução: Consideremos a função g definida por $g(z) = f(z) - 3z$. Como f é analítica em D e $3z$ é analítica em todo o plano complexo temos que $g(z)$ é analítica em D. Observe que

$$g'(z) = f'(z) - 3 = 0, \quad \forall z \in D.$$

Por um teorema, como g é analítica em um domínio D e sua derivada é constante igual a zero neste domínio temos que g é constante. Ou seja, existe uma constante $C \in \mathbb{C}$ tal que

$$g(z) = C \Rightarrow f(z) = 3z + C.$$

Como $f(0) = 1$ temos que $C = 1$. Logo, $f(z) = 3z + 1$ $\square$.

Escolha TRÊS dentre os problemas $3 - 6$.

Problema 3: (2.5) Seja C o círculo dado por $|z| = 3$, calcule

$$\int_C \left(\frac{1}{z} + z^2\right) dz.$$

Solução: Sabemos que

$$\int_C \left(\frac{1}{z} + z^2\right) dz = \int_C \frac{1}{z} dz + \int_C z^2 dz.$$

Como a função $z \mapsto z^2$ é inteira então pelo Teorema de Cauchy-Goursat temos $\int_C z^2 dz = 0$.

Basta então calcular a integral $\int_C \frac{1}{z} dz$. Observe que a função constante igual a 1 é inteira e, como $z = 0$ está no interior de C, podemos aplicar o Teorema da Fórmula da Integral de Cauchy para calcular tal integral. Assim temos,

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_C \frac{1}{z - 0} dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

Então

$$\int_C \left(\frac{1}{z} + z^2\right) dz = 2\pi i.$$

Problema 4**:** (2.5) Sem calcular o valor da integral, mostre que:

$$\left|\int_C \frac{z(z+i)}{z-4}dz\right| \leq \frac{60\pi}{\sqrt{17}-3},$$

onde C é o semi-arco dado por $z = i + 3e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.
Solução: Vamos usar a desigualdade triângular. Observe que se $z \in C$ então $|z| = |i + 3e^{i\theta}| \leq |i| + |3e^{i\theta}| = 4$. Assim, novamente pela desigualdade triângular temos:

$$|z(z+i)| = |z||z+i| \leq 4(|z| + |i|) \leq 4 \cdot 5 = 20. \tag{1.1}$$

Agora note que se $z \in C$ então $|z - i| = |3e^{i\theta}| = 3$. Então,

$$|z-4| = |(z-i) - (4-i)| \geq ||z-i| - |4-i|| = |3 - \sqrt{17}| = \sqrt{17} - 3. \tag{1.2}$$

Por (1.1) e (1.2) temos

$$\left|\frac{z(z+i)}{z-4}\right| \leq \frac{20}{\sqrt{17}-3}.$$

Assim, por um Teorema temos

$$\left|\int_C \frac{z(z+i)}{z-4}dz\right| \leq \frac{20}{\sqrt{17}-3} \cdot L(C),$$

onde $L(C)$ é o comprimento de C. Como C é o semi-círculo superior do círculo de centro i e raio 3 temos $L(C) = 2\pi \cdot 3/2 = 3\pi$. Então,

$$\left|\int_C \frac{z(z+i)}{z-4}dz\right| \leq \frac{60\pi}{\sqrt{17}-3}.$$

Problema 5**:**

a) (1.25) Enuncie o Teorema de Cauchy-Goursat.

b) (1.25) Calcule a integral de $f(x+iy) = (x^2 + e^x \cos y - y^2) + i(2xy + e^x \operatorname{sen} y)$ ao longo do contorno fechado C dado pelo círculo $|z| = 2016^{\pi}$.

Solução: O item (a) foi enunciado em sala de aula. Façamos o item (b). Considere a função f dada. Observe que se $z = x + iy$ então $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, e $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos(y) + ie^x \operatorname{sen}(y)$. Então

$$f(z) = z^2 + e^z.$$

Como $z \mapsto z^2$ e $z \mapsto e^z$ são funções inteiras temos que $f(z)$ é uma função inteira (pois é soma de funções inteiras). Assim f é analítica em todo o $\mathbb{C}$, em particular f é analítica sobre o contorno fechado C dado e em seu interior. Pelo Teorema de Cauchy-Goursat segue que

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Problema 6**:**

a) (1.25) Enuncie o Teorema da Fórmula da integral de Cauchy e o Teorema da Fórmula da Integral de Cauchy generalizada.

b) (1.25) Seja C qualquer contorno fechado simples, positivamente orientado, e seja
$$g(z) = \int_C \frac{s^3 + 2s}{(s-z)^3} ds.$$
Mostre que $g(z) = 6\pi iz$ quando z está dentro de C e que $g(z) = 0$ quando z está fora.

Solução: A parte (a) foi enunciada em sala de aula. Vamos fazer a parte (b). Consideremos $f(s) := s^3 + 2s$. Como f é uma função polinômial f é inteira, portanto, analítica sobre C e dentro de C. Agora há duas possibilidades. Suponhamos que z está dentro de C. Neste caso estamos pelo Teorema da Fórmula da integral de Cauchy generalizada temos que

$$\frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{s^3 + 2s}{(s-z)^{2+1}} ds = f''(z) = 6z.$$

Logo
$$g(z) = \int_C \frac{s^3 + 2s}{(s-z)^3} ds = \frac{2\pi i}{2} 6z = 6\pi iz,$$
mostrando o que queríamos para o caso de z ser interior a C. Suponhamos agora que z está no exterior de C. Neste caso a função $s \mapsto (s-z)^3$ não se anula no interior e nem sobre C e, portanto, a função

$$\frac{s^3 + 2s}{(s-z)^3}$$

é analítica sobre C e em seu interior. Consequentemente pelo Teorema de Cauchy-Goursat temos que

$$g(z) = \int_C \frac{s^3 + 2s}{(s-z)^3} ds = 0,$$

se z é exterior a C. $\square$.

Problemas Bônus.

Problema Bônus-1: (1.0) Demonstre o Teorema da Fórmula da Integral de Cauchy.
Solução: Ver demonstração feita em sala. $\square$.

Problema Bônus-2: (0.5) Para $0 < a < b$, calcule a integral

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|ae^{i\theta} - b|^4} d\theta.$$

Solução: Observe que o integrando é igual a

$$\frac{1}{|ae^{i\theta} - b|^4} = \frac{1}{(ae^{i\theta} - b)^2 (ae^{-i\theta} - b)^2} = \frac{e^{2i\theta}}{(ae^{i\theta} - b)^2 (a - be^{i\theta})^2}.$$

Agora, considere C o contorno fechado positivamente orientado dado pelo círculo unitário $|z| = 1$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z}{(az-b)^2 (a-bz)^2} dz =& \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} \cdot ie^{i\theta}}{(ae^{i\theta} - b)^2 (a - be^{i\theta})^2} d\theta \\ =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{(ae^{i\theta} - b)^2 (a - be^{i\theta})^2} d\theta = I. \end{aligned}$$

Ou seja, basta calcular

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z}{(az-b)^2 (a-bz)^2} dz.$$

Escrevendo

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z}{(az-b)^2 (a-bz)^2} dz = \frac{1}{2\pi i b^2} \int_C \frac{z/(az-b)^2}{(z - \frac{a}{b})^2} dz$$

e utilizando o Teorema da Fórmula da Integral de Cauchy temos

$$I = \frac{1}{b^2}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(az-b)^2}\right)_{|_{z=a/b}} = \frac{a^2+b^2}{(b^2-a^2)^3}.$$