Matemática IV - Soluções da Avaliação 1

Prof. Gabriel Ponce

Problema 1:

a) Observe que $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Então

$$z^{12} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{12} = 2^6 e^{i12\pi/4} = 2^6 e^{i(2\pi+\pi)} = 2^6 e^{i\pi} = -64.$$

Analogamente, temos $w = e^{i\frac{5\pi}{6}} \Rightarrow w^{-8} = e^{-i\frac{5\cdot 8\pi}{6}} = e^{-i\frac{20\pi}{3}}$. Mas $20\pi/3 = 6\pi + 2\pi/3$, logo

$$w^{-8} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Assim,

$$z^{12}\cdot w^{-8} = -64\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 32 + 32\sqrt{3}i.$$

b) Observe que $z^4 - 4z^2 + 3 = (z^2)^2 - 2\cdot 2z^2 + 4 - 1 = (z^2-2)^2 - 1$. Então, pela desigualdade triângular temos:

$$|z^4 - 4z^2 + 3| = |(z^2-2)^2 - 1| \geq |(z^2-2)^2| - |1| = |z^2-2|^2 - 1. \qquad (0.1)$$

Novamente pela desigualdade triângular temos: $|z^2 - 2| \geq |z^2| - |2| = |z|^2 - 2 = 4 - 2 = 2$. Então, substituindo em (0.1) temos

$$|z^4 - 4z^2 + 3| \geq 2^2 - 1 = 3 \Rightarrow \frac{1}{|z^4 - 4z^2 + 3|} \leq \frac{1}{3}. \quad \square$$

Problema 2:

a) Igual ao do problema 1.

b) Seja c uma raíz n-ésima da unidade qualquer, por definição temos $1 = c^n$. Assim,

$$0 = 1 - c^n = (1-c)(c^{n-1} + c^{n-2} + ... + c + 1).$$

Logo, ou $1-c=0$ ou $c^{n-1}+c^{n-2}+...+c+1=0$. Assim, $c=1$ ou $c^{n-1}+c^{n-2}+...+c+1=0$. $\square$

Problema 3: Ver definição dada em aula.
Seja $f(z)=\mathrm{Re}(z)$, então para $z=x+iy$ temos $f(z)=x$, então $u(x,y)=x, v(x,y)=0$. Sabemos que $\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)+i\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$, onde $z_0=x_0+iy_0$. Logo,

$$\lim_{z\to 3i} f(z)=\lim_{(x,y)\to(0,3)} x=0.$$

Problema 4.
a) Sabemos que $\lim_{z\to\infty} f(z)=w_0 \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} f(1/z)=w_0$. Seja $f(z):=\frac{7z^3}{(z-1)^3}$, observe que

$$\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{7\frac{1}{z^3}}{\left(\frac{(1-z)^3}{z^3}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{7}{(1-z)^3}=\frac{7}{\lim_{z\to 0}(1-z)^3}=7.$$

Como este limite existe, então pela propriedade citada no início da solução temos

$$\lim_{z\to\infty}\frac{7z^3}{(z-1)^3}=\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)=7.$$

b) Observe que $(2+i+z)(2+i-z)=(2+i)^2-z^2=3+4i-z^2$. Então

$$\frac{3+4i-z^2}{(2+i-z)(3z-i)}=\frac{(2+i+z)(2+i-z)}{(2+i-z)(3z-i)}=\frac{2+i+z}{3z-i}.$$

Logo,

$$\lim_{z\to 2+i}\frac{3+4i-z^2}{(2+i-z)(3z-i)}=\lim_{z\to 2+i}\frac{2+i+z}{3z-i}=\frac{2+i+2+i}{3(2+i)-i}=\frac{2+i}{3+i}=\frac{(2+i)(3-i)}{10}=\frac{7}{10}+\frac{1}{10}i.$$

Problema 5.
a) Consideremos duas formas de convergir para o ponto $(0,0)$ e vamos mostrar que elas nos dariam valores diferentes para o limite. Considere primeiro $z\to 0$ com $z=x+i\cdot 0$, $x\to 0$ (ou seja, considere $y=0$ e x indo para 0). Neste caso deveríamos ter:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right)^2=1.$$

Agora considere $z \to 0$ pela diagonal, ou seja, $z = x + iy$ com $x = y$ e $x \to 0$. Neste caso deveríamos ter:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+ix}{x-ix}\right)^2 = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}.$$

Observe que $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ e $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$ logo $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} \neq 1$, o que implica que o limite não pode existir. $\square$

b) Análogo ao feito na parte (a) tomaremos duas formas de convergência a 0 que nos dariam valores diferentes para o limite. Consideremos $z \to 0$ na horizontal, ou seja, $z = x + iy$ com $y = 0$ e $x \to 0$. Neste caso

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z)\cdot \mathrm{Im}(z)}{|z|^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0.$$

Consideremos agora $z \to 0$ na diagonal, ou seja, $z = x + iy$ com $x = y$ e $x \to 0$. Neste caso,

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z)\cdot \mathrm{Im}(z)}{|z|^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto o limite não existe. $\square$

Problema 6.

a) Ver enunciado dado em sala.

b) Seja $f(x+iy) = x^2 + i \cdot y^2$, então $u(x,y) = x^2$ e $v(x,y) = y^2$. Observe que u e v são diferenciáveis em qualquer ponto (x,y). Além disso temos,

$$u_x = 2x, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = 2y,$$

logo as derivadas parciais de primeira ordem de u e v existem e são contínuas em todos os pontos. Então pelo Teorema de condições suficientes para diferenciabilidade, para sabermos em quais pontos f é diferenciável basta verificarmos em quais pontos as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas. Observe que $u_y = 0 = -v_x$ em todo ponto e que

$$u_x = v_y, \quad \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y.$$

Logo, f é diferenciável em todos os pontos $z = x + ix$, $x \in \mathbb{R}$ e

$$f'(x + ix) = u_x + iv_x = 2x + i \cdot 0 = 2x.$$

Problema 7. Seja

$$f(z) = g(x) \cdot y + h(y) \cdot x \cdot i, \text{ onde } z = x + iy,$$

uma função inteira, então f é diferenciável em todo ponto z. Portanto, f deve satisfazer as equações de Cauchy-Riemann em todo ponto. Seja $u(x, y) = g(x) \cdot y$ e $v(x, y) = h(y) \cdot x$ temos

$$u_x = g'(x)y, \quad u_y = g(x)$$

$$v_x = h(y), \quad v_y = h'(y)x.$$

Logo $u_y = -v_x$ implica que $g(x) = -h(y)$. Como as equações de Cauchy-Riemann acontecem em todo ponto então temos

$$g(x) = -h(y) \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Fixe $y = 0$ e chame $K = -h(0)$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $g(x) = -h(0) = K$, logo g é constante igual a K. Analogamente, fixe $x = 0$. Então, para todo $y \in \mathbb{R}$ temos $h(y) = -g(0) = -K$, logo h é constante igual a $-K$. Assim concluímos que

$$f(z) = g(x)y + h(y)xi = K(y - xi) = K(x + iy) \cdot (-i) = -Kz \cdot i,$$

com K constante, como queríamos demonstrar. $\square$

Problema 8. Consideremos $|a| = |b| = |c| = 1$ satisfazendo $a + b + c = 1$. Observe que $c \neq 0$, então podemos multiplicar ambos os lados da equação por c^{-1} :

$$ac^{-1} + bc^{-1} + 1 = 0.$$

Chame $\alpha = ac^{-1}, \beta = bc^{-1}$. Então $\alpha + \beta = -1$. Seja $\alpha = x + iy$, $\beta = p + iq$ então

$$(x + p) + i(y + q) = -1 \Rightarrow x + p = -1 \quad \text{ e } y + q = 0.$$

Como $|\alpha| = |\beta| = 1$ temos $x^2 + y^2 = p^2 + q^2 = 1$. Substituindo p por $-1 - x$ e q por $-y$ temos:

$$1 = (-1 - x)^2 + y^2 = 1 + 2x + x^2 + y^2 = 2 + 2x \Rightarrow x = -1/2.$$

Logo $p = -1 - x = -1/2$. Então $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $q = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, $\alpha, \beta, 1$ são os vértices do triângulo equilátero formado pelos complexos $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Multiplicando esses vértices por $c = e^{i\theta}$ temos os complexos: $e^{i\theta}, e^{i(\frac{2\pi}{3}+\theta)}, e^{i(\frac{4\pi}{3}+\theta)}$, que também são vértices de um triângulo equilátero pois cada dois consecutivos tem um ângulo de $2\pi/3$ entre si. $\square$

Problema 9. Considere um ponto $z \in \mathbb{C}$ qualquer. Lembre-se que $|z-a|$ é a distância de z à a e $|z-b|$ é a distância de z à b.

Considere z' a projeção ortogonal de z sobre a reta que passa pelos pontos a e b. Então temos dois triângulos retângulos $zz'a$ e $zz'b$ com hipotenusas za e zb respectivamente. Portanto

$$|z-a| \geq |z'-a| \quad \text{e} \quad |z-b| \geq |z'-b|.$$

Assim,

$$|z-a|^2 + |z-b|^2 \geq |z'-a|^2 + |z'-b|^2.$$

Então, basta minimizar a expressão para os pontos que estão sobre a reta que passa por a e b. Observe que o mínimo deve ser atingido para algum z' que está entre a e b. Chame $x = |z'-a|$ e $d = |b-a|$, então, assumindo que z' está entre a e b, temos $|z'-b| = d-x$. Assim,

$$|z'-a|^2 + |z'-b|^2 = x^2 + (d-x)^2 = 2x^2 - 2dx + d^2.$$

Então basta minimizarmos o x. Seja $g(x) = 2x^2 - 2dx + d^2$, temos $g'(x) = 4x - 2d = 0 \Rightarrow x = d/2$. Então o mínimo é atingido em $x = d/2$. Substituindo temos que

$$|z'-a|^2 + |z'-b|^2 = 2(d/2)^2 - 2d(d/2) + d^2 = \frac{d^2}{2}$$

é o mínimo. Tal mínimo é assumido quando z é o ponto médio do segmento ab. $\square$