Matemática IV - Avaliação 1

Prof. Gabriel Ponce

Nome: RA:

Atenção: Não se esqueça de colocar nome em TODAS as folhas.

Escolha o problema 1 OU 2.

Problema 1:

a) (1.0) Seja $z = 1 + i$, $w = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, calcule $z^{12} \cdot w^{-8}$ (Obs: coloque na forma $x + iy$).

b) (1.0) Mostre que se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $|z| = 2$, então

$$\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| \leq \frac{1}{3}.$$

Problema 2:

a) (1.0) Seja $z = 1 + i$, $w = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, calcule $z^{12} \cdot w^{-8}$ (Obs: coloque na forma $x + iy$).

b) (1.0) Mostre que se c é qualquer raiz n-ésima da unidade, então ou $c = 1$ ou

$$1 + c + c^2 + ... + c^{n-1} = 0.$$

Escolha TRÊS dentre os problemas $3 - 6$.

Problema 3: (2.0) Seja $f : S \to \mathbb{C}$, $S \subset \mathbb{C}$ uma função de uma variável complexa e seja z_0 um ponto interior de S. Defina o que significa dizer que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

Calcule $\lim_{z \to 3i} \operatorname{Re}(z)$.

Problema 4: Calcule os seguintes limites:

a) (1.0)

$$\lim_{z\to\infty} \frac{7z^3}{(z-1)^3}$$

b) (1.0)

$$\lim_{z\to 2+i} \frac{3+4i-z^2}{(2+i-z)(3z-i)}.$$

Problema 5: Mostre que os seguintes limites não existem

a) (1.0)

$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2.$$

b) (1.0)

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z)\cdot \mathrm{Im}(z)}{|z|^2}.$$

Problema 6:

a) (1.0) Enuncie o Teorema das Equações de Cauchy-Riemann.

b) (1.0) Seja $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por

$$f(x+iy) = x^2 + i\cdot y^2.$$

Determine os pontos onde f é diferenciável e calcule o valor da derivada nesses pontos.

Escolha PELO MENOS um problemas dentre os problemas $7-9$.

Problema 7. (2.0) Sejam $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ duas funções reais diferenciáveis em todo ponto, definimos $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ por

$$f(z) = g(x)\cdot y + h(y)\cdot x\cdot i, \text{ onde } z = x+iy.$$

Mostre que se f for uma função inteira então existe uma constante $K\in\mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = -Kz\cdot i,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Problema 8. (1.5) Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que $|a| = |b| = |c| = 1$ e $a + b + c = 0$. Prove que a, b e c são vértices de um triângulo equilátero no plano complexo.

Problema 9. (1.5) Sejam $a, b \in \mathbb{C}$, determine o menor valor possível para

$$|z - a|^2 + |z - b|^2,$$

com $z \in \mathbb{C}$.

Boa Prova!!