Introdução à Análise no $\mathbb{R}^n$
Provinha 4

Questão 1: Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dado $k \geq 1$ e uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^m$, defina o que é dizer que f é de classe C^k.

Questão 2: Enuncie e demonstre o Teorema da Regra da Cadeia.

Questão 3: Prove que transformações bilineares são de classe $C^{+\infty}$. Conclua que o produto interno é sempre $C^{+\infty}$.

Questão 4: Seja $\mathbb{R}^m = E \oplus F$ uma decomposição de $\mathbb{R}^m$ em soma direta e seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$. Defina o que são as derivadas parciais $\partial_1 f$ e $\partial_2 f$ caso existam.

Questão 5: Enuncie o Teorema de Schwarz.

Questão 6: Considere a decomposição de $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ onde

$$E = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$F = \{(0, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Defina a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz.$$

Calcule $\partial_1 f(x, y, z)$ e $\partial_2 f(x, y, z)$.