Introdução à análise no $\mathbb{R}^n$

Prof. Gabriel Ponce

Prova 2

Nome: Curso:

Resolva os problemas 1 E 2.

Problema 1: (3.0)

a) Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função. Defina o que é dizer que f é diferenciável em um ponto $x_0 \in U$.

b) Defina matriz jacobiana de uma transformação diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^n$, onde $U \subset \mathbb{R}^m$ é um aberto.

c) Seja $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação bilinear. Prove que B é diferenciável e calcule sua derivada.

Problema 2: (1.0) Defina difeomorfismo e difeomorfismo local. Dê um exemplo de um difeomorfismo local que não é um difeomorfismo.

Resolva o problema 3 OU 4.

Problema 3: (2.0)

a) Enuncie e demonstre o Teorema da Regra da Cadeia.

b) Seja $M(2)$ o espaço das matrizes reais 2×2. Defina $g : M(2) \to M(2)$ por $g(X) = X^3$. Calcule a derivada $g'(X)$.

Problema 4: (2.5)

a) Seja $M(2)$ o espaço das matrizes reais 2×2. Defina $g : M(2) \to M(2)$ por $g(X) = X^3$. Calcule a derivada $g'(X)$.

b) Seja $F(t) = (f_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq 2}$ uma matriz 2×2 onde a entrada (i,j) é uma função C^1, $f_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e seja $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função

$$u(t) := \operatorname{Tr}(F(t)^3).$$

Mostre que u é diferenciável e que

$$u'(t) = 3 \operatorname{Tr}(F(t)^2 F'(t)).$$

Obs: O traço satisfaz: $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Resolva o problema 5 OU 6.

Problema 5:

a) (1.0) Enuncie o Teorema da Desigualdade do Valor Médio.

b) (1.0) Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se existe $f''(0) = 0$ e, além disso, $f(0) = f'(0) = 0$, então

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{|x|^2} = 0.$$

Problema 6:

1. (1.0) Seja $\mathbb{R}^m = E \oplus F$ uma decomposição de $\mathbb{R}^m$ em soma direta e seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$. Defina o que são as derivadas parciais $\partial_1 f$ e $\partial_2 f$ caso existam.

2. (1.0) Considere a decomposição de $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ onde

$$E = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$F = \{(0, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Defina a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx.$$

Calcule $\partial_1 f(x, y, z)$ e $\partial_2 f(x, y, z)$.

Escolha o problema 7 OU 8

Problema 7:

1. (0.5) Enuncie o Teorema da Função Implícita.

2. (1.0) Demonstre o Teorema da Função Implícita

3. (0.5) Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, tal que

$$\int_0^1 f(t)dt = 3.$$

Mostre que, para cada x num certo intervalo $[0, \delta]$, existe um único $\xi(x) \in [0, 1]$ tal que

$$\int_x^{\xi(x)} f(t)dt = 2$$

e que a função $\xi : [0, \delta] \to [0, 1]$ assim definida é de classe C^1. Calcule a derivada $\xi'(x)$.

Problema 8:

i) (1.0) Enuncie o Teorema da Função Inversa.

ii) (0.5) Enuncie e demonstre o Teorema da Forma Local das Submersões.

iii) (0.5) Seja $M(2)$ o espaço das matrizes reais 2×2. Defina $F : M(2) \to M(2)$ por

$$F(X) = X + X^2.$$

Prove que a imagem de F contém uma vizinhança da origem.

Problemas EXTRAS

Problema 9**:** (2.0) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável cujas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ são contínuas em x. Suponha que existe $K > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \leq K$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, ..., n$. Prove que

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n} \cdot K||x - y||,$$

onde $||u|| := \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}$.

Problema 10**:** (2.0) Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciável satisfazendo:

- $f(0) = 1$;
- $f'(0) = 0$;
- para todo $x \in [0, \infty)$

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0.$$

Prove que para todo $x \in [0, \infty)$ temos

$$f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}.$$