Introdução à análise no $\mathbb{R}^n$

Prof. Gabriel Ponce

Prova 1

Nome: Curso:

Escolha o problema 1 ou 2.

Problema 1:

a) (1.0) Defina:

1. Transformação linear entre dois espaços vetoriais.
2. Norma em um espaço vetorial.
3. Produto interno em um espaço vetorial.
4. Base de um espaço vetorial.

b) (1.0) Determine uma base para o espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ de todas as transformações lineares de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}$.

Problema 2:

a) (1.5) Defina:

1. Transformação linear entre dois espaços vetoriais.
2. Norma em um espaço vetorial.
3. Produto interno em um espaço vetorial.
4. Base de um espaço vetorial.

b) (0.5) Demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz: seja $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um produto interno e $||v|| := (< v, v >)^{1/2}$ a norma induzida por este produto interno, então:

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||,$$

para todos $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Escolha três dentre os problemas $3-6$.

Problema 3:

1. (1.0) Defina bola aberta em $\mathbb{R}^n$. Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ defina o interior de X.

2. (1.0) Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto e $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas. Suponha que para um ponto $a \in X$ temos

$$f(a) \neq g(a).$$

   Prove que existe $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in B(a, \delta) \cap X$ então $f(x) \neq g(y)$.

Problema 4: Diga se cada afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira demonstre, se for falsa dê um contra-exemplo.

( ) (0.5) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é aplicação linear bijetora então f é homeomorfismo.

( ) (0.3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, o conjunto das matrizes reais $n \times n$ invertíveis é aberto.

( ) (0.5) Todo ponto aderente de um conjunto X é ponto de acumulação de X.

( ) (0.4) Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ pertence à fronteira de X (ou seja, $x \in \partial X$ se, e somente se, ele é aderente a X e a $(\mathbb{R}^n - X)$.

( ) (0.3) Considere $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ as projeções na primeira e segunda coordenada respectivamente. Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ com $\pi_1(X) \subset \mathbb{R}$ e $\pi_2(X) \subset \mathbb{R}$ subconjuntos abertos, então X é aberto em $\mathbb{R}^2$.

Problema 5: (2.0)

1. (1.0) Defina conjunto limitado em $\mathbb{R}^n$. Defina conjunto compacto em $\mathbb{R}^n$.

2. (1.0) Prove que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $f : K \to \mathbb{R}^m$ é contínua e injetora, então $f : K \to f(K)$ é homeomorfismo.

Problema 6**:**

1. (1.0) Mostre que o seguinte limite não existe

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{(x-1)y^2z}{(x-1)^3+y^6+z^3}.$$

2. (1.0) Mostre que a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi(x,y) = (\cos(y)\cdot x^4 + e^y, (x+y)^{2016})$$

é contínua.

Escolha PELO MENOS dois problemas dentre os problemas $8-10$**.**

Problema 7**.**

1. (0.7) Enuncie e demonstre o Teorema de Bolzano-Weierstrass em $\mathbb{R}^n$ para a norma da soma.

2. (0.3) Demonstre que duas normas quaisquer em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes e conclua que o Teorema de Bolzano-Weierstrass enunciado no item anterior vale para qualquer norma em $\mathbb{R}^n$.

Problema 8**.** (0.1) Defina conjunto aberto, conjunto aberto em X, conjunto fechado e conjunto fechado em X. Prove que:

a) (0.3) Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(A) \subset X$ é aberto em X para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

b) (0.3) Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(F) \subset X$ é fechado em X para todo $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado.

c) (0.3) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tem interior vazio se, e somente se, seu complementar é denso em $\mathbb{R}^n$.

Problema 9. (1.0) Determine todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ que satisfazem

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y),$$

para quaisquer $x, y \in (0, +\infty)$.

Problema 10. (1.5) Consideremos um subconjunto $X \subset GL(n)$, onde $GL(n)$ denota o conjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis. Assuma que X satisfaz as seguintes propriedades:

- a matriz identidade $n \times n$, I, está em X, isto é, $I \in X$;
- dada qualquer matriz $A \in X$, temos $A^{-1} \in X$;
- se $A, B \in X$ então $AB \in X$;
- I é um ponto interior de X.

Prove que X é aberto em $\mathbb{R}^{n^2}$.