Introdução à Análise no $\mathbb{R}^n$
Quinta Lista

Prof. Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1 Fórmula de Taylor

Problema 1: Enuncie e demonstre o Teorema da Fórmula de Taylor.

2 Teoremas da Função Inversa e Implícita

Problema 2: Defina difeomorfismo e difeomorfismo local. Dê um exemplo de um difeomorfismo local que não é um difeomorfismo.

Problema 3: Seja J um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Mostre que toda aplicação contínua e aberta f (isto é, se $A \subset J$ é aberto então $f(A) \subset \mathbb{R}$ é aberto) é injetora. Conclua que todo difeomorfismo local $f : J \to \mathbb{R}$ é um difeomorfismo sobre sua imagem.

Problema 4: Enuncie e demonstre o Teorema da Perturbação da identidade.

Problema 5: Enuncie o Teorema da Função Inversa.

Problema 6: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y, z) = (x^2 \operatorname{sen} y, y^2 \operatorname{sen} x),$$

a) Mostre que f é uma função de classe C^∞ mas não é difeomorfismo.

b) Mostre que para todo ponto $(x, x) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo

$$|x| \neq 2 \cdot \operatorname{tg}(x),$$

existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$, com $(x, x) \in V$ e uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^2$, $f(x, x) \in W$, tal que $f|V : V \to W$ é um difeomorfismo de classe C^∞.

Problema 7: Enuncie e demonstre o Teorema da Forma Local das Submersões.

Problema 8: Enuncie e demonstre o Teorema da Função Implícita.

Problema 9: Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, tal que

$$\int_0^1 f(t)dt = 3.$$

Mostre que, para cada x num certo intervalo $[0, \delta]$, existe um único $\xi(x) \in [0, 1]$ tal que

$$\int_x^{\xi(x)} f(t)dt = 2$$

e que a função $\xi : [0, \delta] \to [0, 1]$ assim definida é de classe C^1. Calcule a derivada $\xi'(x)$.