Introdução à Análise no $\mathbb{R}^n$
Quarta Lista

Prof. Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1 Derivadas Parciais

Problema 1: Seja $\mathbb{R}^m = E \oplus F$ uma decomposição em soma direta de $\mathbb{R}^m$ e $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função. Defina o que são as derivadas parciais de f na primeira e na segunda coordenada.

Problema 2: Demonstre o Teorema 7.1 do Elon. Análise no espaço $\mathbb{R}^n$.

Problema 3: Considere a decomposição de $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ onde

$$E = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$F = \{(0, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Defina a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz.$$

Calcule $\partial_1 f(x, y, z)$ e $\partial_2 f(x, y, z)$.

Problema 4: Considere a decomposição de $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ onde

$$E = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$F = \{(0, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Defina a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz.$$

Calcule $\partial_1 f(x,y,z)$ e $\partial_2 f(x,y,z)$.

Problema 4**:** Considere a decomposição de $\mathbb{R}^4 = E \oplus F \oplus G$ onde

$$E = \{(x, 0, 2x, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$F = \{(0, t, t, s) : t, s \in \mathbb{R}\},$$

$$G = \{(0, y, 0, 0) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Defina $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y, z, w) = ((x + y + z + w)^2, x - y).$$

Calcule as derivadas parciais $\partial_i f$, $1 \leq i \leq 4$.

Problema 5**:** Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ uma bola aberta de centro 0. Dada $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k $(k \geq 1)$, com $f(0) = 0$, mostre que existe

$$A : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

de classe C^{k-1}, tal que

$$f(x) = A(x) \cdot x,$$

para todo $x \in U$.

2 O Teorema de Schwarz

Problema 6**:** Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^4. Então, mostre que para cada $x \in U$:

- a derivada $f^{(3)}(x)$ é uma aplicação 3-linear simétrica;
- a derivada $f^{(4)}(x)$ é uma aplicação 4-linear simétrica.