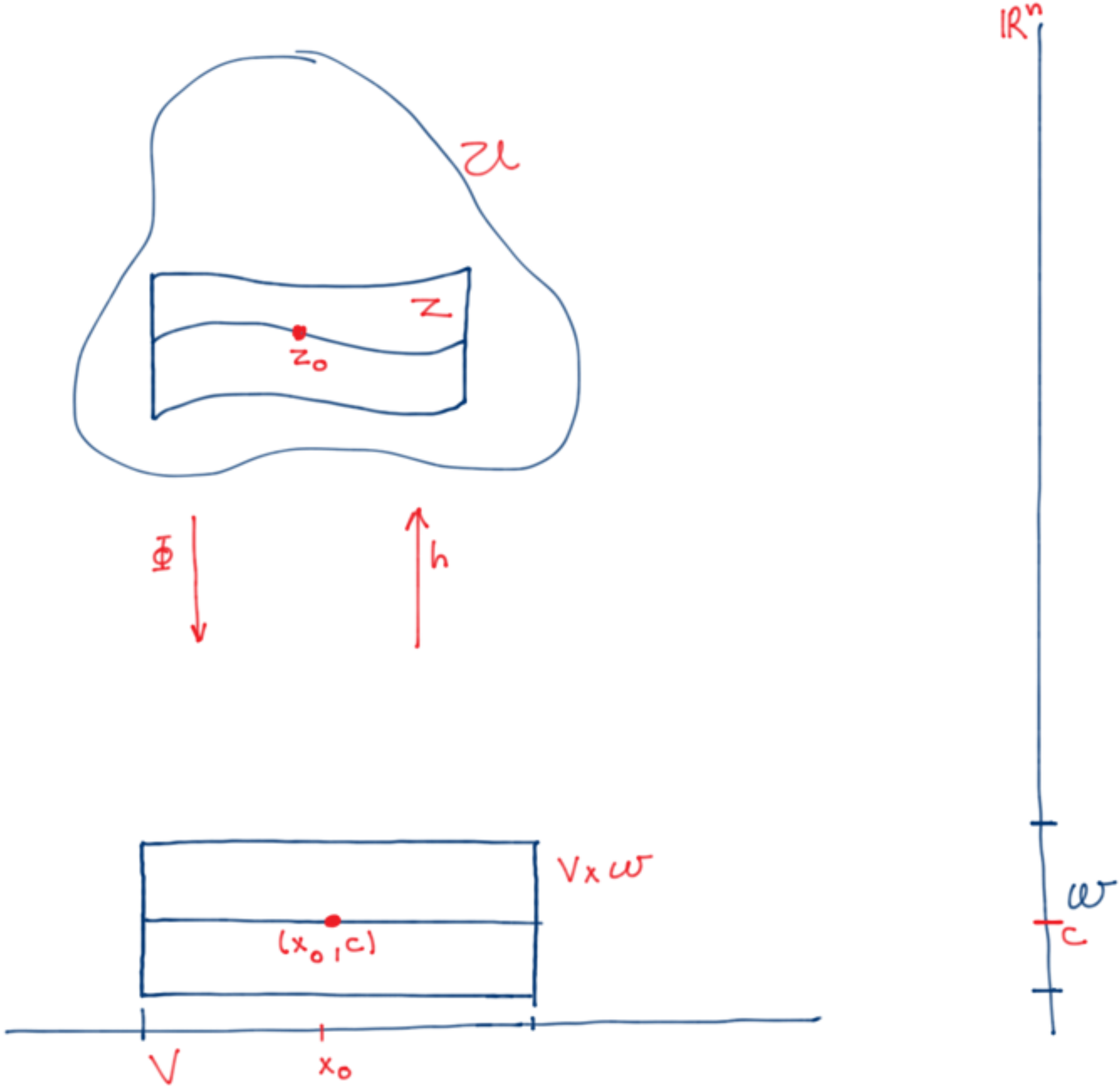
$\mathbb{R}^n$
$\mathcal{U}$
Z
z_0
Φ
h
$V \times W$
(x_0, c)
W
c
V
x_0

Teorema da Função implícita.

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k $(k \geq 1)$. Suponha que $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$ é uma decomposição em soma direta tal que, para $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$, a segunda parcial $\partial_2 f(z_0): F \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo.

Ponha $f(z_0) = c \in \mathbb{R}^n$. Então existem abertos $V \subset E$ contendo x_0 e $Z \subset \mathcal{U}$ contendo z_0 com a seguinte propriedade: para cada $x \in V$ há um único $\xi(x) \in F$ tal que $(x, \xi(x)) \in Z$ e

$$f(x, \xi(x)) = c.$$

A aplicação $\xi: V \to F$ assim definida é de classe C^k e sua derivada é dada por

$$\xi'(x) = -[\partial_2 f(x, \xi(x))]^{-1} \circ \partial_1 f(x, \xi(x)).$$

prova.

Usando a notação do Teorema das submersões, temos:

$$Z = h(V \times \omega)$$

$$h(x, \omega) = (x, h_2(x, \omega)) \quad \text{para } (x, \omega) \in V \times \omega.$$

Ponha $\xi(x) = h_2(x, c)$. Então $\xi: V \to F$ é de classe C^k e

$f(x, \xi(x)) = f \circ h(x, c) = c$, $\forall x \in V$. Basta mostrar a unicidade. Suponha que $(x, y) \in Z$ é tal que $f(x, y) = c$. Então:

$$(x, y) = h\,\Phi(x, y) = h(x, f(x, y)) = h(x, c) = (x, h_2(x, c)) = (x, \xi(x)) \quad \therefore y = \xi(x).$$

Basta calcular a derivada.

Derivando $f(x, \xi(x)) = c$, obtemos:

$$\partial_1 f(x, \xi(x)) \cdot id + \partial_2 f(x, \xi(x)) \circ \xi'(x) = 0 .$$

Logo $\xi'(x) = -\partial_2 f(x, \xi(x))^{-1} \circ \partial_1 f(x, \xi(x))$ ∎

FIM.