Teorema do Ponto Fixo. Toda contração $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tem um único ponto fixo.

— Como aplicação do Teorema do Ponto Fixo provaremos que se perturbarmos a inclusão $i: U \to \mathbb{R}^m$ adicionando uma contração então obteremos um homeomorfismo de U sobre um aberto de $\mathbb{R}^m$.

Teorema (Perturbação da identidade)

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Se $\Phi: U \to \mathbb{R}^m$ é uma contração, então a aplicação $f: U \to \mathbb{R}^m$ dada por: $f(x) = x + \Phi(x)$, é um homeomorfismo de U sobre um aberto de $\mathbb{R}^m$.

demonstração:

Dados x, y arbitrários em U, tem-se

$$|f(x)-f(y)| = |x-y+\Phi(x)-\Phi(y)| \geq$$

$$\geq |x-y| - |\Phi(x)-\Phi(y)| \geq |x-y| - \lambda \cdot |x-y|$$

$$= (1-\lambda)\cdot|x-y|.$$

Desta expressão sai de imediato que f é injetora e que $f^{-1}: f(U) \to U$ é contínua.

De fato, se $f(x) = f(y)$ então $0 = |f(x)-f(y)| \geq (1-\lambda)\cdot|x-y| \Rightarrow x = y$

Além disso:

$$|x-y| = |f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(y))| \geq (1-\lambda).|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)|.$$

$\therefore$ f^{-1} é contínua.

A única coisa que falta mostrar é que $f(\mathcal{U})$ é um aberto de $\mathbb{R}^m$.

- Tome $b \in f(\mathcal{U})$, $b = f(a)$ e queremos mostrar que b é ponto interior de $f(\mathcal{U})$.

Como $\mathcal{U}$ é aberto, podemos tomar uma bola fechada $\bar{A}$ de centro a, tal que

$\bar{A} \subset \mathcal{U}$. Chame δ = raio de $\bar{A}$.

Afirmamos que a bola B aberta de centro $f(a) = b$ e raio $(1-\lambda).\delta$ está contida em $f(\mathcal{U})$.

- Tome $y \in B$, isto é, $|y-b| < (1-\lambda).\delta$.

Devemos encontrar um $x \in \mathcal{U}$ tal que $y = f(x) = x + \Phi(x)$.

Ou seja, queremos encontrar $x \in \mathcal{U}$ tal que: $\boxed{\Phi(x) - y = x}$

Chame $\Phi_y(x) = \Phi(x) - y$. Então, queremos encontrar um ponto fixo $x \in \mathcal{U}$

para a aplicação: $\Phi_y(x) = x$.

- 1. A aplicação Φ_y é contração,
- 2. $\bar{A}$ é fechado e limitado ($\therefore$ completo em $\mathbb{R}^m$), precisamos mostrar que $\Phi_y(\bar{A}) \subset \bar{A}$, e aí a contração $\Phi_y|\bar{A} : \bar{A} \to \bar{A}$ terá um ponto fixo.

Seja $x \in \bar{A}$ temos: $|x-a| \leq \delta$. Então

$$b = f(a) = a + \Phi_y(a) \Rightarrow |\Phi_y(x) - a| = |y - \Phi(x) - a| \leq$$

$$\leq |y - \Phi(a) - a| + |\Phi(x) - \Phi(a)| \leq$$

$$\leq |y-b| + \lambda \cdot |x-a| \leq (1-\lambda) \cdot \delta + \lambda . \delta = \delta$$

Logo $\Phi_y(\bar{A}) \subset \bar{A}$ ∎

Teorema da Função Inversa.

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ tal que, em um ponto $x_0 \in \mathcal{U}$, $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ é um isomorfismo.

Então f é um difeomorfismo de classe C^k de uma vizinhança V de x_0 sobre uma vizinhança ω de $f(x_0)$.

Corolário. Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k $(k \geq 1)$. Uma condição necessária e suficiente para que f seja um C^k- difeo. local é que, para cada $x \in \mathcal{U}$,

$$f'(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

seja um isomorfismo.

- Na prática, para verificar se $f'(x)$ é isomorfismo verificamos se o determinante jacobiano é não nulo.

Exemplo. Consideremos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$f(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \operatorname{sen} y)$$

O determinante jacobiano é:

$$\begin{vmatrix} e^x . \cos y & -e^x . \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} . \cos^2 y + e^{2x} \operatorname{sen}^2 y = e^{2x} > 0$$

Então $f'(x,y)$ é isomorfismo em todos os ptos. Logo f é difeo local C^∞.

Aplicação importante: Teorema Fundamental da álgebra.

Seja $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um polinômio complexo não constante,

$$p(z) = a_0 + a_1 . z + \dots + a_n . z^n, \quad a_n \neq 0,\ n \geq 1.$$

Então p é sobrejetivo; em particular $\exists\ z_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que: $p(z_0) = 0$.

demonstração: Sabemos que $p'(z) = a_1 + 2a_2 . z + \dots + n . a_n . z^{n-1}$.

Como um polinômio não nulo pode ter apenas um nº finito de raízes, o cjto $F = \{z \in \mathbb{R}^2 : p'(z) = 0\}$ é finito, assim como $p(F)$.

Em particular: $\mathbb{R}^2 - p(F)$ é conexo (believe me!)

- Considere a aplicação $P: \mathbb{R}^2 - p^{-1}(p(F)) \to \mathbb{R}^2 - p(F)$ definida por restrição de p.

Para cada $z \in \mathbb{R}^2 - p^{-1}(p(F))$ temos $z \notin F$ $\therefore$ $P'(z) = p'(z) \neq 0$, então

$P'(z)$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da Função Inversa, P é uma aplicação aberta.

Em particular, a imagem de P é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2 - p(F)$.

Por outro lado, o cjto de valores de P é fechado em $\mathbb{R}^2 - p(F)$.

Então a imagem de P é aberta e fechada no conexo $\mathbb{R}^2 - p(F)$.

Logo P é sobre $\mathbb{R}^2 - p(F)$ $\Rightarrow$ p é sobre $\mathbb{R}^2$ ∎

A Forma Local das Submersões

Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ é chamada uma **submersão** se, para todo $x \in \mathcal{U}$, a derivada

$$f'(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \text{ é sobrejetiva.}$$

Claro isso só pode ocorrer se $m \geq n$.

Exemplo. Seja $\pi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a projeção definida por $\pi(x,y) = y$.

Então $\pi'(x,y) = \pi$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ $\therefore$ π é submersão.

O Teorema da Forma Local das Submersões irá mostrar que toda submersão é essencialmente como uma projeção.

Obs. No seguinte Teorema tomaremos decomposições em soma direta

$$\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$$

de tal modo que $T|F$ é um isomorfismo sobre $\mathbb{R}^n$, onde $T : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear sobrejetora.

Teorema (Forma Local das Submersões)

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k $k \geq 1$. Suponha que para algum $z_0 \in \mathcal{U}$,

$$f'(z_0) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$$

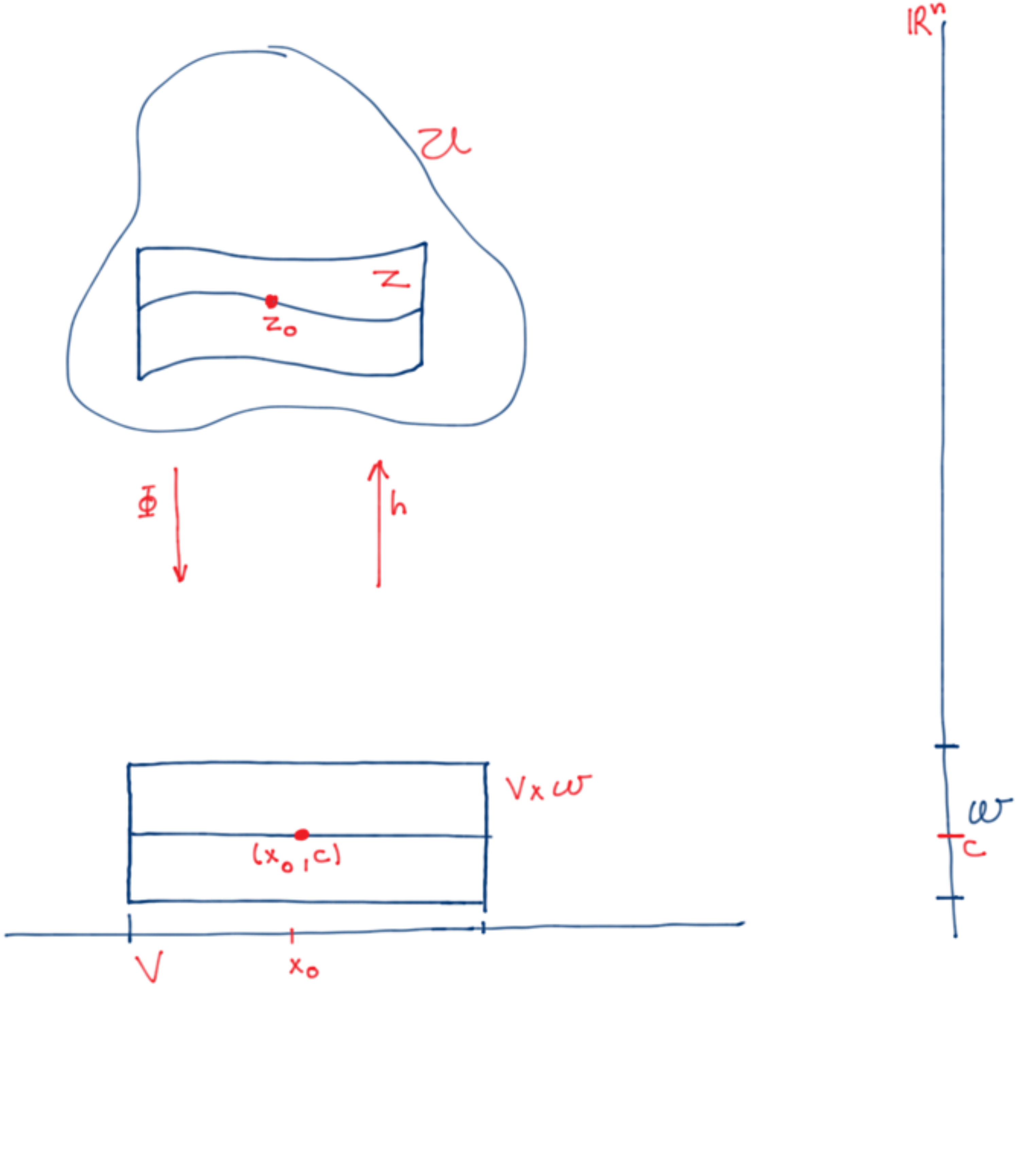
é sobrejetiva. Dada uma decomposição qualquer $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$ com $z_0 = (x_0, y_0)$, tal que:

$$\partial_2 f(z_0) = f'(z_0)|F : F \to \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo, existe um difeomorfismo $h : V \times W \to Z$, de classe C^k tal que

$$f \circ h(x, w) = w \quad \text{para todo } (x, w) \in V \times W$$

onde $V \ni x_0$ é aberto em E, $W \ni f(z_0)$ aberto em $\mathbb{R}^n$ e $Z \ni z_0$ é aberto em $\mathbb{R}^{m+n}$ $(Z \subset \mathcal{U})$.



𝒰
Z
z₀
Φ
h
V x W
(x₀, c)
V
x₀
ℝⁿ
W
c

Prova. Defina a aplicação $\Phi : \mathcal{U} \to E \times \mathbb{R}^n$, de classe C^k, pondo

$$\Phi(x,y) = (x, f(x,y)).$$

- $\Phi'(z_0)\cdot(h,k) = (h \,;\, \partial_1 f(z_0) h + \partial_2 f(z_0)\cdot k)$.

A aplicação linear: $(u,v) \mapsto (u, [\partial_2 f(z_0)]^{-1}\cdot(v - \partial_1 f(z_0)\cdot u))$ é uma inversa para $\Phi'(z_0)$.

P. exemplo: $\Phi'(z_0)(u, [\partial_2 f(z_0)]^{-1}(v - \partial_1 f(z_0)\cdot u)) =$

$$= (u, \partial_1 f(z_0)\cdot u + \partial_2 f(z_0)\cdot \partial_2 f(z_0)^{-1}\cdot(v - \partial_1 f(z_0)\cdot u)) =$$

$$= (u, v).$$

Então, pelo Teo. da Função inversa, se escrevermos $f(z_0) = c$, Φ é

um difeo de classe C^k de uma vizi. de z_0 sobre uma vizi. de (x_0, c). Esta última pode ser escolhida da forma $V \times W$. (V ab em E, W ab em $\mathbb{R}^n$).

Ponha $Z := \Phi^{-1}(V \times W)$ e $h = \Phi^{-1} : V \times W \to Z$.

Então, para qq $(x,\omega) \in V \times W$ temos:

$$\Phi(x,y) = (x, f(x,y)) \Rightarrow h = \Phi^{-1} \text{ é da forma}$$

$$h(x,\omega) = (x, h_2(x,\omega))$$

$\therefore\ (x,\omega) = \Phi \circ h(x,\omega) = (x, f(h(x,\omega))) \implies \omega = f\circ h(x,\omega)$ ∎