A Fórmula de Taylor

Dado um vetor $h \in \mathbb{R}^m$, escreveremos:

$$h^{(j)} = (h, h, \dots, h) \in \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m$$

Então se $\varphi : \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for uma aplicação j-linear,

$\varphi \cdot h^{(j)}$ significará $\varphi(h, \dots, h)$.

Teorema (Taylor Infinitesimal)

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Se f é s vezes diferenciável em U e, num ponto $a \in U$, existe $f^{(s+1)}(a)$, então

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{1}{2!} \cdot f''(a) \cdot h^{(2)} + \dots + \frac{1}{(s+1)!} f^{(s+1)}(a) \cdot h^{(s+1)} + r(h),$$

onde $\lim \frac{r(h)}{|h|^{s+1}} = 0$.

demonstração: Consideremos a aplicação $r : B \to \mathbb{R}^n$, definida numa bola aberta de centro 0 em $\mathbb{R}^n$ por:

$$r(x) = f(a+x) - f(a) - f'(a) \cdot x - \dots - \frac{1}{(s+1)!} \cdot f^{(s+1)}(a) \cdot x^{(s+1)}.$$

Veja que r é $s+1$ vezes dif. em $x=0$ e s vezes dif em B.

Além disso $r^{(j)}(0) = 0$ para $j = 1, 2, \dots, s+1$.

Obs. Isto segue da diferenciabilidade de funções lineares pois

$$g : h \longmapsto \underbrace{(h, h, \dots, h)}_{K \text{ vezes}} \quad \text{é linear}$$

$$f^{(K)}(a) : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{K \text{ vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é K-linear.

Então $f^{(K)}(a) \circ g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é C^∞ e utilizando a regra da cadeia temos:

$$[f^{(K)}(a) \circ g]'(h) = f^{(K)}(a)'(h^{(K)}) \circ \underbrace{g'(h)}_{= g}$$

Então $[f^{(K)}(a) \circ g]'(0) = (f^{(K)}(a))'(0) \circ g$

Mas sabemos que:

$$[f^{(K)}(a)]'(h^{(K)}) : \mathbb{R}^m \times \dots \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \dots, x_K) \to f^{(K)}(a).(x_1, h^{(K-1)}) + f^{(K)}(a) \cdot (h, x_2, h^{(K-2)}) + \vdots \; f^{(K)}(a) \cdot (h^{(K-1)}, x_K).$$

Portanto $[f^{(K)}(a)]'(0) = 0$. Análogo até ordem K.

Agora, o Teorema seguirá do seguinte lema.

Lema. Seja $B \subset \mathbb{R}^m$ uma bola aberta de centro 0. Se $r: B \to \mathbb{R}^n$ é s vezes diferenciável em B, $s+1$ vezes diferenciável no ponto 0 e, além disso

$$r^{(j)}(0) = 0, \text{ para } 0 \leq j \leq s+1,$$

então

$$\lim_{x \to 0} \frac{r(x)}{|x|^{s+1}} = 0.$$

demonstração: Para $s=0$, então segue da defi. de diferenciabilidade.

Suponha por indução que o lema vale para s. Pela D.V.M temos:

$$M = \sup\{|r'(y)| : y \in [0,x]\}.$$

$$\Rightarrow |r(x) - r(0)| \leq \sup|r'(y) : y \in [0,x]| \cdot |x| \quad \therefore$$

$$|r(x)| \leq M \cdot |x|.$$

Pela hipótese de indução aplicada para r', sabemos que, $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que:

$$|r'(y)| < \varepsilon \cdot |y|^s \quad \forall\ |y| < \delta.$$

Então $\forall\ |x| < \delta$ temos $M < \varepsilon \cdot |x|^s \quad \therefore \quad |r(x)| \leq \varepsilon \cdot |x|^{s+1}$. ■

definição. Uma aplicação $f: U \to \mathbb{R}^n$ definida no subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, chama-se analítica em U quando é C^∞ em U e, para cada $x \in U$, existe um $\delta > 0$ tal que:

$$|h| < \delta \Rightarrow x + h \in U \quad e$$

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x) \cdot h^{(j)}.$$

Exemplo de função C^∞ não analítica:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = e^{-1/t^2}, \quad \forall\, t \neq 0$$

$$f(0) = 0.$$

$$f'(t) = (e^{-t^{-2}})' = -(-2) \cdot t^{-3} \cdot e^{-t^{-2}} \therefore f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{2t^{-3} e^{-t^{-2}}}{t}$$

Logo $f'(0) = 0$. Por indução $f^{(k)}(0) = 0$, $\forall\, k$. Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x) \cdot h^{(j)} = 0 \neq f(0+h).$$

Teorema da Função Inversa

- Sejam $\mathcal{U}, V \subset \mathbb{R}^m$ abertos. Um difeomorfismo $f : \mathcal{U} \to V$ é uma bijeção diferenciável cuja inversa tb é diferenciável.

Se ambas f e f^{-1} são C^k, dizemos que f é um difeo de classe C^k.

Exemplo. $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = e^x$ é um difeo de classe C^∞ cuja inversa é $f^{-1}(x) = \log x$.

- Se $f : \mathcal{U} \to V$ é difeo então por um resultado anterior temos que

$$f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \text{ é isomorfismo } \forall x, \text{ e}$$

$$[f'(x)]^{-1} = (f^{-1})'(f(x)).$$

definição (difeomorfismo local) Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Uma função diferenciável $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ é chamada um difeomorfismo local se, para cada $x \in \mathcal{U}$, existe uma vizinhança V_x de x tal que:

$$f|V_x \text{ é difeomorfismo sobre uma vizinhança } W_x \text{ de } f(x).$$

Quando, além disso, $f|V_x$ for C^k dizemos que f é um difeo. local de classe C^k.

Exemplo. Se J é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, todo difeo local

$$f: J \to \mathbb{R} \quad \text{é} \quad 1\text{-}1$$

sendo portanto um difeo de J sobre $f(J)$.

prova. Suponha que $\exists$ $a, b \in J$, $a \neq b$ e $f(a) = f(b)$.

Então existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$f(c) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\} \quad \text{ou}$$

$$f(c) = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Então f leva um pequeno intervalo aberto $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ em um intervalo não-aberto do tipo $(d-\delta, d]$ ou $[d, d+\delta)$, contradizendo o fato que f é difeo local (pois neste caso, leva aberto em aberto).

Afirmação: Um difeo local, sendo uma aplicação aberta, é um difeo sobre sua imagem se, e somente se, é 1-1.

prova. $(\Rightarrow)$ Óbvio.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $f: U \to f(U)$ é 1-1 e é difeo local.

Então f^{-1} existe e, para cada ponto x temos $f^{-1}: W_x \to V_x$ é diferenciável $\therefore$ f^{-1} é dif. em x ∎

• O Teorema da Função inversa estabelece uma "recíproca" deste resultado: se $f \in C^k$ e $f'(x)$ é isomorfismo, $\forall\, x \in U$, então f é um difeo local de classe C^k.

— Teorema do Ponto Fixo.

definição: Seja $f: X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função. f é dita uma contração se

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ 0 < \lambda < 1 \quad \text{tal que} \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \cdot \|x - y\|,$$

$\forall\, x, y \in X$.

Exercício. Considere $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto tal que: $\forall\, x, y \in U$ temos $[x, y] \subset U$.

Considere $f: U \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável tal que existe $0 < \lambda < 1$ com

$$|f'(x)| \leq \lambda, \quad \forall\ x \in U.$$

Prove que f é uma contração.

definição. Um ponto $x \in U$ é dito um ponto fixo para $f: U \to \mathbb{R}^m$ se

$$f(x) = x.$$

Teorema do Ponto Fixo. Toda contração $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tem um único ponto fixo.

– Como aplicação do Teorema do Ponto Fixo provaremos que se perturbarmos a inclusão $i: U \to \mathbb{R}^m$ adicionando uma contração então obtemos um homeomorfismo de U sobre um aberto de $\mathbb{R}^m$.

Teorema (Perturbação da identidade)

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Se $\Phi: U \to \mathbb{R}^m$ é uma contração, então a aplicação

$f: U \to \mathbb{R}^m$ dada por: $f(x) = x + \Phi(x)$, é um homeomorfismo de U sobre um aberto de $\mathbb{R}^m$.