· Quando existe o limite é único.

· A continuidade se exprime tb por meio de limites: se o ponto $a \in X$ é isolado então toda $f: X \to \mathbb{R}^n$ é cont. em a; se $a \in X'$ então f é contínua em a se, e somente se,

$$\lim_{x \to a} f(x_k) = f(a).$$

Formulação em termos de sequências: Para que $b = \lim_{x \to a} f(x)$ é necessário e suficiente que $\lim f(x_k) = b$ para toda sequência $x_k \to a$, $x_k \neq a$.

(2) Para que exista $\lim_{x \to a} f(x)$ é suficiente que exista $\lim f(x_k)$ seja qual for a seq. de pontos $x_k \in X - \{a\}$ com $\lim x_k = a$.

Teorema. Seja a um pto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}^m$. Dada a aplicação $f: X \to \mathbb{R}^n$, cujas fçs coordenadas são $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n : X \to \mathbb{R}$, tem-se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b = (b_1, \dots, b_n)$$

se, e somente se, $\lim_{x \to a} f_i(x) = b_i$, $1 \leq i \leq n$.

Relação entre limites e operações

Teorema. Dadas as seq. convergentes de termos $x_k, y_k \in \mathbb{R}^m$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}$, sejam $\lim x_k = a$, $\lim y_k = b$ e $\lim \alpha_k = \alpha$. Então

(1) $\lim (x_k + y_k) = a + b$

(2) $\lim \alpha_k \cdot x_k = \alpha \cdot a$.

(3) $\lim \langle x_k, y_k \rangle = \langle a, b \rangle$ (Prod. int. usual)

(4) $\lim \|x_k\| = \|a\|$. (Qq norma)

prova .

(1), (2), (3) - Basta olhar para as seq. coordenadas.

(4). $|\, \|x_k\| - \|a\| \,| \leq \|x_k - a\| \longrightarrow 0 \therefore \|x_k\| \to \|a\|$ ■

Teorema . $X \subset \mathbb{R}^m$, $a \in X'$, $b, c \in \mathbb{R}^n$, $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha : X \to \mathbb{R}$ tq

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \lim_{x \to a} g(x) = c, \quad \lim_{x \to a} \alpha(x) = \alpha_0 .$$

Então

(1) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c$.

(2) $\lim_{x \to a} \alpha(x) \cdot f(x) = \alpha_0 \cdot b$.

(3) $\lim_{x \to a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle$.

(4) Seja $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ bilinear. Dadas agora $f : X \to \mathbb{R}^m$, $g : X \to \mathbb{R}^n$, com $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e g limitada então

$$\lim_{x \to a} \varphi(f(x), g(x)) = 0.$$

prova : (1), (2), (3) - coordenadas

(4) $|\varphi(f(x), g(x))| \leq M \cdot |f(x)| \cdot |g(x)| \to 0$ ■

Exemplo de aplicação da última:

Consideremos $f: \mathbb{R}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$

Mostremos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

- Como $f(x,y)$ é produto de x por $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ e claramente $\lim\limits_{(x,y)\to 0} x = 0$ então basta mostrar que

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \text{ é limitada.}$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$ observe que: $\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Então $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| = |\operatorname{sen}\theta| \cdot |\cos\theta| \leq 1$. $\square$

Relações entre limite e composições

Sejam $f: X \to \mathbb{R}^n$, $g: Y \to \mathbb{R}^p$, $a \in X'$, $b \in Y'$ e $f(X) \subset Y$ então:

1. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e g é contínua no ponto b então
$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b).$$

2. Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $\lim_{y \to b} g(y) = c$ e $x \neq a \Rightarrow f(x) \neq b$ então $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$.

Corolário. Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ então $\lim_{x \to a} \|f(x)\| = \|b\|$.

Exemplo. Mostre que não existe o limite $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Solução.

Tome $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ e $a = (0,0)$. Se existir $\lim_{x \to a} f(x) = b$

então tem que existir $\lim_{t \to 0} f \circ g(t) = \lim_{t \to 0} f(a + tu) = b$, onde $g(t) := a + t.u$, onde u é um vetor fixado qualquer.

Mas se pusermos $u = (\alpha, \beta)$ temos: $\lim_{t \to 0} f(t\alpha, t\beta) = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ que dá diferentes valores quando variamos α e β. Logo o limite não existe ∎

Permanência das desigualdades

Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ definidas em $X \subset \mathbb{R}^m$ e seja $a \in X'$. Suponhamos que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$. Se existirem $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$ então devemos ter $b \leq c$.

prova. Suponha que $c < b$. Então $\varepsilon = \frac{b-c}{2} > 0$.

Para este ε, $\exists\, \delta > 0$ tal que:

$$x \in X,\quad 0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{e}$$

$$0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow |g(x) - c| < \varepsilon.$$

Então $g(x) < \varepsilon + c = c + \frac{b-c}{2} = \frac{b+c}{2} = b - \left(\frac{b-c}{2}\right) < f(x)$. O que contraria a hipótese ∎

Conjuntos abertos

definição (Ponto interior) Seja X um subcjto do $\mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in X$ é dito ponto interior de X quando: existe $\delta > 0$ tal que

$$B(a, \delta) \subset X.$$

Chamamos de interior de X e denotamos por $\operatorname{int} X$ o conjunto formado por todos os pontos interiores de X.

- Dado um ponto $x \in \mathbb{R}^n$, se V é um conjunto tal que $x \in \operatorname{int}(V)$, dizemos que V é uma vizinhança do ponto x.

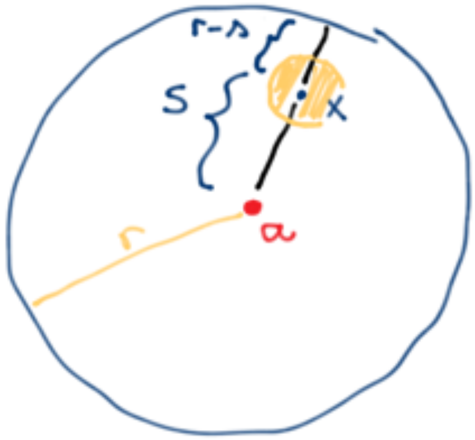
definição (conjunto aberto) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset X$.

Proposição: Toda bola aberta $B(a;r) \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

prova. Suponha que $x \in B(a,r)$.

Seja $s = \|x-a\| < r$

Tome $\delta := \frac{r-s}{2}$.



Tome $y \in B(x,\delta)$. Então

$$\|y-a\| \leq \|y-x\| + \|x-a\| < \delta + s < (r-s) + s = r$$

Logo $B(x,\delta) \subset B(a,r)$. Portanto todo pto $x \in B(a,r)$ é ponto interior, ou seja, $B(a,r)$ é aberto.

Proposição 2. O complementar de uma bola fechada $B[a,r]$ também é aberto.

prova. Suponha que $x \notin B[a,r]$. Então: $\|x-a\| > r$. Defina

$$\delta = \|x-a\| - r.$$

Se $y \in B(x,\delta)$ temos: $\|y-a\| = \|y-x+x-a\| \geq \|x-a\| - \|y-x\| >$

$$> \|x-a\| - \delta = r.$$

Logo $B(x,\delta) \subset \mathbb{R}^n - B[a,r]$ ∎

Proposição. Seja X um conjunto aberto então $\text{int}(X)$ é aberto.

prova: Tome $x \in \text{int}(X)$. Então $\exists\ \delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset X$.

Agora, $\forall\ y \in B(x,\delta)$ existe $\eta > 0$ tal que $B(y,\eta) \subset B(x,\delta) \subset X$ $\therefore$

todos os pontos $y \in B(x,\delta)$ são ptos interiores de X, ou seja,
$B(x,\delta) \subset \text{int}(X) \Rightarrow \text{int}(X)$ é aberto ■

• Exemplo de conjunto não aberto.

A bola fechada não é um cjto aberto. Tome $B[a,r] \subset \mathbb{R}^n$. Tome $b \in S[a,r]$ ou seja:

$$\|b-a\| = r.$$

Dado $\delta > 0$ qualquer defina: $y = b + \frac{\delta}{2r}\cdot(b-a)$. Então.

(1) $\|y-b\| = \frac{|\delta|}{2r}\cdot\|b-a\| = \frac{\delta}{2} < \delta \quad \therefore \quad y \in B(a,\delta)$.

(2) $\|y-a\| = \left\| b-a + \frac{\delta}{2r}(b-a)\right\| = \left| 1 + \frac{\delta}{2r}\right| \cdot \|b-a\| = \left(1+\frac{\delta}{2r}\right)\cdot r > r$

Logo $y \notin B[a,r]$. Ou seja, existem pontos de $B[a,r]$ que não são pontos interiores $\therefore$ $B[a,r]$ não é aberto ■

Corolário. $\text{int}(B[a,r]) = B(a,r)$.

Dado um cjto $X \subset \mathbb{R}^n$ e um pto $a \in \mathbb{R}^n$ só há 3 possibilidades:

(1) $a \in \text{int}\, X$ ou

(2) $a \in \text{int}(\mathbb{R}^n - X)$ ou

(3) Toda bola $B(a,\delta)$ tem pontos de X e de $\mathbb{R}^n - X$.

definição. Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ dizemos que $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de fronteira de X se, para todo $r > 0$ temos:

$$B(a,r) \cap (\mathbb{R}^n - X) \neq \emptyset \quad , \quad B(a,r) \cap X \neq \emptyset .$$

Denotamos o cjto de todos os pontos de fronteira de X por ∂X e o chamaremos de fronteira de X.

Exemplo. Se $X = B[a,r]$ então $\partial X = S[a,r]$.

Se $Y = B(a,r)$ então $\partial Y = S[a,r]$.

Corolário. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se,

(Ex em sala)

$$A \cap \partial A = \emptyset .$$

Teorema. Os conjuntos abertos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ gozam das seg. propriedades:

(1) $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ são abertos,

(2) A interseção $A = A_1 \cap \ldots \cap A_k$ de um nº finito de abertos é aberto.

(3) A reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos abertos é um cjto aberto.

prova.

(1) · $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ são obviamente abertos.

(2) Seja $a \in A$. Então p/ cada i temos a é ponto interior de A_i $\therefore$

$\exists\, \delta_i > 0$ tq $B(a, \delta_i) \subset A_i$, $1 \le i \le k$

Seja $\delta_0 = \min\limits_{1 \le i \le k} \delta_i$, então $B(a, \delta_0) \subset A_i \ \forall\, 1 \le i \le k \longrightarrow$

$$\Rightarrow B(a, \delta_0) \subset A_1 \cap \dots \cap A_k = A .$$

Logo $a \in \operatorname{int} A$ $\therefore$ como $a \in A$ era arbitrário temos A é aberto.

(3) Tome $a \in A = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Então $\exists\, \lambda \in \Lambda$ tq $a \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, $\exists\, \delta > 0$ tq

$$B(a, \delta) \subset A_\lambda \subset A \qquad \blacksquare$$

definição. (aberto em um conjunto).

Fixado um cjto $X \subset \mathbb{R}^n$. Um subconjunto $A \subset X$ diz-se aberto em X quando, para cada $a \in A$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$B(a; \delta) \cap X \subset A .$$

Noutras palavras: para cada $a \in A$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$\{x \in X : \|x - a\| < \delta\} \subset A .$$

Exemplo. $A = (0,1]$ é aberto em $X = [0,1]$.

prova. Já sabemos que todo $x \in (0,1)$ é pto interior de A. Basta então verificar para $x = 1$.

Para $x = 1$ temos que: $B(1, 1/2) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \subset \mathbb{R}$.

Logo $B(1, 1/2) \cap X = \left(1/2 ; 1\right] \subset A$. ■

Teorema. Um conjunto $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, existe um aberto

$$B \subset \mathbb{R}^n$$

tal que $A = B \cap X$.

prova.

($\Leftarrow$) Se B é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $A = B \cap X$ então $\forall\, a \in A$ temos $a \in B$ $\therefore\ \exists\ \delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset B$.

Assim $B(a,\delta) \cap X \subset B \cap X = A$. Logo A é aberto.

($\Rightarrow$) Se A é aberto, para cada $x \in A$ tome δ_x tq: $B(a, \delta_x) \cap X \subset A$.

Então $A = \bigcup_{x \in A} B(a, \delta_x) \cap X = \underbrace{\left[\bigcup_{x \in A} B(a, \delta_x)\right]}_{B} \cap X = B \cap X$

Como B é união de abertos então

B é aberto ■

Teorema (Muito Importante)

Seja $f: X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. A fim de que f seja contínua, é necessário e suficiente que:

$f^{-1}(A) \subset X$ é um aberto em X para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

prova:

(necessário) Suponha q f é contínua. Tome $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dado $x \in f^{-1}(A)$ qualquer, $f(x) \in A$. Então $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que: $B(f(x), \varepsilon) \subset A$.

Como f é contínua: $\exists\ \delta > 0$ tal que: $y \in X$, $\|y - x\| < \delta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$.

Logo $B(x, \delta) \cap X \subset f^{-1}(A)$. Da arbitrariedade de $x \in f^{-1}(A)$ segue que $f^{-1}(A)$ é aberto.

(suficiente). Tome $a \in X$ qualquer. Então dado $\varepsilon > 0$ qualquer, o cjto $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ é aberto em X, portanto para a, $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$B(a, \delta) \cap X \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$$

isto é, se $x \in X$ e $\|x - a\| < \delta$ então $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Logo f é cont. em todo $a \in X$ $\therefore$ contínua ∎

Corolário

(1) Se $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ são abertos então $A \times B \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é aberto.

(2) Se $A \subset \mathbb{R}^m$ é aberto então $\pi_i(A)$ é aberto onde $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a proj. na i-ésima coordenada.

prova.

(1) Observe que:

$$A \times B = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B)$$

π_1 e π_2 são contínuas $\therefore$ $A \times B$ é aberto.

(2) Na norma do sup temos $B(a,\delta) = \prod_{j=1}^{m} (a_j - \delta, a_j + \delta)$.

Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Tome $a_i = \pi_i(a) \in \pi_i(A)$. Então, $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$B := \prod_{j=1}^{m} (a_j - \delta; a_j + \delta) \subset A \therefore \pi_i(B) \subset \pi_1(A)$$

Mas $\pi_i(B) = (a_i - \delta, a_i + \delta)$. Logo a_i é pto interior de $\pi_i(A)$ ∎