Como

$$\|x\|_{sup} \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_{sup}$$

então a conv. na norma do sup é equivalente à convergência na norma euclidiana.

Teorema. Uma seq. (x_k) em $\mathbb{R}^n$ converge (com relação à norma sup/eucl) para o ponto $a = (a_1, \dots, a_n)$ se, e somente se, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ tem-se

$$\lim_{k \to \infty} x_{ki} = a_i \quad .$$

prova. Tomemos a norma do sup. Nesta norma temos:

$$|x_{ki} - a_i| \leq \|x_k - a\|_{sup} .$$

Então $\lim x_k = a \Rightarrow \|x_k - a\|_{sup} \to 0 \Rightarrow x_{k_i} \to a_i \quad \forall i$.

Reciprocamente, se $\lim x_{ki} = a_i \quad \forall i$, então dado $\varepsilon > 0$, existem $k_1, \dots, k_n$ tais que: $k > k_i \Rightarrow |a_{ki} - a_i| < \varepsilon$. Seja $k_0 = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ então $k > k_0 \Rightarrow \|x_k - a\|_{sup} = \max\{|a_{ki} - a_i|\} < \varepsilon$.

Logo $\lim x_k = a$ ∎

Teorema (Bolzano - Weierstrass)

Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente com relação às métricas euclidiana e do sup.

prova.

Primeiro vamos fazer para $\mathbb{R}$. Vamos usar o seguinte Lema do cálculo.

Lema. Se $(x_k) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência monótona e limitada então x_k é convergente.

Considere $(x_k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência limitada. Diremos que um elemento x_i é um $\boxed{\text{pico}}$ da sequência (x_k) se:

$$x_i \geq x_m \quad , \forall \quad i > m.$$

Suponhamos que (x_k) tem apenas um nº finito de picos: $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$
Tome o último pico a ocorrer: x_{i_l} (onde $i_1 < i_2 < \dots < i_l$).

Assim, x_{i_l+1} não é um pico. Logo existe $n_1 > i_l + 1$ tal que:

$$x_{n_1} > x_{i_l+1} .$$

Mas x_{n_1} tb não é pico $\therefore \exists\, n_2 > n_1$ tq $x_{n_2} > x_{n_1}$. Continuando com este raciocínio, construímos uma sequência crescente e limitada

$$x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \dots$$

Pelo lema ela é convergente.

Falta o caso em que tem infinitos picos.

Supondo que a sequência (x_k) tem infinitos picos, tome a subsequência (x_{n_i}) formada por estes picos.

Por definição de pico temos: $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3} \geq \cdots$, ou seja, esta subsequência é monótona e limitada.

Pelo lema ela é convergente. Isto conclui a prova de B-W para $\mathbb{R}$.

Agora vamos estender para $\mathbb{R}^n$.

Tome $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ uma seq. lim. Por Teorema anterior a seq. das primeiras coordenadas é limitada $\therefore$ possui subseq. convergente.
Isto é, existem um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ e um nº real a_1 tais que $\lim_{k \in \mathbb{N}_1} x_{k1} = a_1$.

Por sua vez, a seq. limitada $(x_{k2})_{k \in \mathbb{N}_1}$ possui sub. seq convergente para algum a_2, isto é, $\exists\ \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ tq

$$\lim_{k \in \mathbb{N}_2} x_{k2} = a_2$$

Repetindo este processo obtemos conjuntos infinitos.

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \cdots \supset \mathbb{N}_n$$

e valores reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que $\lim_{k \in \mathbb{N}_i} x_{ki} = a_i$.

Em particular:

$$\lim_{k \in \mathbb{N}_n} x_{ki} = a_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Logo $\lim_{k \in \mathbb{N}_n} x_k = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ■

definição: Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas definidas em $\mathbb{R}^n$. Diremos que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes quando existirem constantes $a>0$ e $b>0$ tais que:

$$\|x\|_1 \leq a.\|x\|_2 \quad e \quad \|x\|_2 \leq b.\|x\|_1 , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Observe que se d_1 é a métrica induzida por $\|\cdot\|_1$ e d_2 a métrica induzida por $\|\cdot\|_2$ temos:

$$d_1(x,y) \leq a.\, d_2(x,y) \quad e \quad d_2(x.y) \leq b.\, d_1(x,y).$$

Observe tb que se $\|\cdot\|_1$ é equivalente a $\|\cdot\|_2$ então:

$\lim x_k = a$ com respeito à $\|\cdot\|_1 \Leftrightarrow$

$\lim x_k = a$ com respeito à $\|\cdot\|_2$.

Teorema. Duas normas quaisquer no espaço $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

prova. Considere a seguinte norma (chamada norma da soma)

$$\|x\| := \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$$

Vamos mostrar que todas as normas são equivalentes a esta. Tome uma norma arbitrária $\|\cdot\|_2$. Defina b por:

$$b := \max \{ \|e_1\|_2, \|e_2\|_2, \|e_3\|_2, \dots, \|e_n\|_2 \}.$$

Então, $\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ temos:

$$\|x\|_2 = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_2 \leq |x_1| . \|e_1\|_2 + \dots + |x_n| . \|e_n\|_2 \leq b . \|x\| .$$

Resta provar que $\exists\ a>0$ tal que : $\|x\| \leq a.\|x\|_2$, $\forall x$.

Suponha q. isso seja falso. Então para cada $k \in \mathbb{N}$, $\exists\ x_k \in \mathbb{R}^n$ tal que :

$$\|x_k\| > k.\|x_k\|_2 .$$

Ponhamos $u_k = \frac{1}{\|x_k\|}.x_k$. Então $\|u_k\|_2 < \frac{1}{k}$ e $\|u_k\| = 1$, $\forall k$.

A seq (u_k) é então limitada p/ a norma da soma $\therefore$ por B-W subseq converge p/ algum $u \in \mathbb{R}^n$.

Como $\|u\| = \lim \|u_{k_j}\| = 1$ então $u \neq 0$.

Por outro lado , $\forall j \in \mathbb{N}$ temos :

$$\|u\|_2 \leq \|u_{k_j} - u\|_2 + \|u_{k_j}\|_2 \leq b.\|u_{k_j} - u\| + \frac{1}{k_j} \to 0$$

Logo $\|u\|_2 = 0 \Rightarrow u = 0$ absurdo .

Então de fato $\exists\ a>0$ tq $\|\cdot\| \leq a.\|\cdot\|_2$ ■ .

Pontos de acumulação.

definição: Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é dito um ponto de acumulação do conjunto X se: dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\underset{b \neq a}{b \in X}$ tal que $b \in B(a, \varepsilon)$

ou seja,

$$X \cap [B(a,\varepsilon) - \{a\}] \neq \emptyset .$$

Exemplo

(1) Seja $X = B(0,r)$ então todo ponto $x \in B[0,r]$ é ponto de acumulação de X.

prova. Tome $x \in B[0,r]$. Então $\|x\| \leq r$. Dado $\varepsilon > 0$, queremos mostrar que existe $y \neq x$ tal que:

$$y \in X \quad \text{e} \quad y \in B(x, \varepsilon)$$

ou seja, queremos $y \neq x$ com $\|y\| < r$ e $\|x - y\| < \varepsilon$.

Denotemos $\|x\| = a$. Podemos assumir que $\varepsilon < 2 \cdot a$

Tome $y = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2a}\right) \cdot x$. Então temos $y \neq x$ $\left(\text{pois } 1 - \frac{\varepsilon}{2a} \neq 1\right)$ e

$$\|y\| = \left|1 - \frac{\varepsilon}{2a}\right| \cdot \|x\| \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2a}\right) \cdot r < r \quad \therefore \quad y \in B(0,r) = X$$

$$\|x - y\| = \left\| \frac{\varepsilon}{2a} \cdot x \right\| = \frac{\varepsilon}{2a} \cdot \|x\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \therefore \quad y \in B(x, \varepsilon) \quad \blacksquare$$

Notação: O conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto X será representado por X' e será chamado de conjunto derivado de X.

• Como vimos no exemplo acima, um pto de acumulação de X não precisa pertencer a X.

Teorema. Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1) a é ponto de acumulação de X
2) existe uma sequência de pts $x_k \in X$, com $\lim x_k = a$ e $x_k \neq a$, para todo $k \in \mathbb{N}$
3) Toda bola aberta de centro a contém uma infinidade de pontos de X.

prova.

$(1) \Rightarrow (2)$
Assumindo que a é pto de acumulação; para todo $k \in \mathbb{N}$ obtemos um ponto $x_k \in X$ tal que:

$$0 < |x_k - a| < 1/k \quad \text{e} \quad x_k \neq a.$$

Logo $x_k \neq a$ $\forall k$ e $\lim x_k = a$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Tome uma bola $B(a,r)$. Como existe uma seq. $x_k \to a$ então $\exists k_0$ tq $\{x_k : k > k_0\} \subset B(a,r)$.

Logo $B(a,r)$ tem infinitos elementos.

$(3) \Rightarrow (1)$ Trivial ∎

Corolário. Se $X' \neq \emptyset$ então X é infinito.

Exemplo de cjto sem ptos de acumulação: $\mathbb{Z}$ não tem ptos de acumulação.

Teorema. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é infinito e limitado então $X' \neq \emptyset$.

demonstração: Como X é infinito podemos tomar em X uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ onde todos os termos são distintos.

Como X é limitado esta sequência é limitado $\therefore$ por Bolzano-Weierstrass ela converge para um ponto $a \in \mathbb{R}^n$.
Pelo Teorema anterior $a \in X'$ ■

definição. Um ponto $a \in X$ que não é ponto de acumulação de X é chamado de ponto isolado.
Um conjunto X onde todo $a \in X$ é isolado é chamado de conjunto discreto.

Obs. Observe que um ponto $a \in X$ é isolado se, e somente se, existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(a, \varepsilon) \cap X = \{a\}.$$

Funções contínuas em $\mathbb{R}^n$.

definição: Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto, $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^m$, $\|\cdot\|'$ norma em $\mathbb{R}^n$.

Uma função $f: X \to \mathbb{R}^n$ é dita contínua no ponto $a \in X$ se:

dado qualquer $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que: $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|' < \varepsilon$.

Equivalentemente:

$$\text{dado } \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } f(B(a,\delta)) \subset B(f(a), \varepsilon).$$

Proposição: A definição de continuidade acima independe do par de normas $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ que tomarmos em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$.

prova. Vamos mostrar que podemos mudar $\|\cdot\|$ e a prova de que tb podemos mudar $\|\cdot\|'$ será análoga.

Considere outra norma $|\cdot|$ em $\mathbb{R}^m$. Como $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\alpha \cdot \|\cdot\| \leq |\cdot| \leq \beta \cdot \|\cdot\|.$$

Suponha que f seja contínua em $a \in X$ (com respeito a $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$). Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tq:

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|' < \varepsilon$$

Logo: $|x - a| < \alpha \cdot \delta \Rightarrow \|x - a\| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot |x - a| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|' < \varepsilon$.

Então f é tb contínua com respeito ao par de normas $|\cdot|$ e $\|\cdot\|'$.

Analogamente podemos provar que podemos trocar $\|\cdot\|'$ ∎

• Se $f: X \to \mathbb{R}^n$ é contínua em todos os pontos dizemos que f é contínua.

Obs. Se $f: X \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $Y \subset X$ então $f: Y \to \mathbb{R}^n$ é contínua.

definição. (função Lipschitziana)

Uma função $f: X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação Lipschitziana se existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \cdot \|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in X.$$

Exemplo: Toda aplicação linear é Lipschitziana.

Com efeito, tome $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear e tome a norma da soma em $\mathbb{R}^m$ e em $\mathbb{R}^n$.

Seja $C := \max\{\|A \cdot e_1\|, \ldots, \|A \cdot e_m\|\}$. Então para qq $x = (x_1, \ldots, x_m)$ temos:

$$\|A \cdot x\| = \|A \cdot (\textstyle\sum x_i e_i)\| \leq \sum |x_i| \cdot \|A e_i\| \leq C \cdot \|x\|.$$

Então dados x, y quaisquer temos: $\|A(x-y)\| \leq C \cdot \|x - y\|$ ∎

Proposição. Toda aplicação Lipschitziana é contínua, em particular toda aplicação linear é contínua.

prova. Seja $f: X \to \mathbb{R}^n$ Lipschitziana e $C > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \cdot \|x - y\| \quad , \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$ qualquer tome $\delta = \frac{\varepsilon}{2C}$. Então,

$$\|x-y\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2C} \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq C \cdot \|x-y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo f é contínua em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^n$ ■