Posto de uma matriz

Posto coluna: Dimensão do espaço gerado pelas colunas de uma matriz

Posto linha: Dimensão do espaço gerado pelas linhas de uma matriz.

Teorema. Para qualquer matriz $A^{m\times n}$, o posto linha é igual ao posto coluna de A.

prova: Seja p o posto coluna de $A=(a_{ij})$ então existem p vetores

$$w_k=(b_{1k},\dots,b_{mk})\in\mathbb{R}^m$$

tais que cada uma das colunas $v_j=(a_{1j},\dots,a_{mj})$, $1\le j\le n$, é comb linear de $w_1,\dots,w_p$:

$$v_j=\sum_{k=1}^{p} c_{kj}\,w_k \quad , \quad 1\le j\le n. \qquad (*)$$

Tomando a i-ésima coordenada de cada membro de $(*)$ temos:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} c_{kj}\cdot b_{ik} \quad , \quad 1\le i\le m, \quad 1\le j\le n \\ &= \sum_{k=1}^{p} b_{ik}\cdot c_{kj} \qquad (**) \end{aligned}$$

Seja $z_k:=(c_{k1},\dots,c_{kn})$ então $(**)$ implica que os vetores linha de A são combinações lineares de $z_1,z_2,\dots,z_p$. Portanto posto linha $\le p =$ posto coluna. Fazendo o mesmo argumento para A^t concluímos que posto linha $=$ posto coluna. $\blacksquare$

Revisão : Determinantes

- Dada uma matriz 1×1 temos: $A=(a)$, $\det A := a$.

  " " " 2×2, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definimos $\det A = ad-bc$.

definição: Seja A uma matriz $n\times n$. A matriz $(n-1)\times(n-1)$ que é obtida de A deletando a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A é chamada de o (i,j)-menor de A.
Denotamos o (i,j)-menor de A por A_{ij}.

- Dada qualquer matriz A $n\times n$, definimos indutivamente o determinante de A como sendo:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik} \cdot \det A_{ik}}$$

Observe que a função determinante restrita ao espaço das matrizes $n\times n$ pode ser visto como uma função de $\mathbb{R}^{n^2}$ em $\mathbb{R}$.

$$\det : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Proposição. São válidas:

(1) Uma matriz A $n\times n$ é inversível $\Leftrightarrow$ posto$(A) = n$.

(2) posto$(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Proposição: São válidas:

(1) $\det(A.B) = \det A \cdot \det B$, para matrizes $n \times n$ A e B.

(2) $\det A^{tr} = \det A$.

Teorema. A função determinante $\det : M(n\times n) \longrightarrow \mathbb{R}$ é linear em cada linha.

prova. Considere $A = (a_{ij})$. Chame $u_1, u_2, \dots, u_n$ as linhas de A.

Tome um vetor v_i qualquer. Então observe que os (i,k)-menores da matriz A são os mesmos que os (i,k)-menores da matriz B obtida somando v_i na i-ésima linha de A.

Então:

$$\det B = \sum (-1)^{i+k} (a_{ik} + v_{ik}) \cdot \det A_{ik}$$

$$= \sum (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} + \sum (-1)^{i+k} v_{ik} \cdot \det A_{ik}$$

$$= \det(u_1, \dots, u_n) + \det(u_1, \dots, v_i, \dots, u_n).$$

Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\det(u_1, \dots, \alpha u_i, \dots, u_n) = \sum (-1)^{i+k} \alpha . a_{ik} \cdot \det A_{ik} = \alpha \cdot \det(u_1, \dots, u_n). \blacksquare$$

definição: Sejam $V_1, V_2, \dots, V_n$ e W espaços vetoriais. Uma aplicação

$$f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$$

é dita linear em cada coordenada (ou n-linear) se:

(1) Para cada $1 \leq i \leq n$, dados quaisquer $u, v \in V_i$ temos:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, u+v, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, u, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, v, \dots, x_n)$$

(2) Para cada $1 \leq i \leq n$, dado qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$f(x_1, \dots, \alpha x_i, \dots, x_n) = \alpha \cdot f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Uma aplicação 1-linear é o mesmo que uma aplicação linear. Uma transformação 2-linear é geralmente chamada de transformação <u>bilinear</u>.

<u>Exemplos</u>.

(1) O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é bilinear

(2) O determinante: $\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{\mathbb{R}^{n^2}} \longrightarrow \mathbb{R}$ é n-linear.

<u>Topologia do espaço $\mathbb{R}^n$</u>

<u>definição</u> (métrica) Dado um conjunto X, uma métrica é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que as seguintes propriedades ocorrem para todos $x, y, z \in X$

(1) $d(x,y) = d(y,x)$

(2) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Dizemos que um espaço X é um espaço métrico se ele está munido de alguma métrica.

Observação: Se X é um espaço métrico com métrica d e $Y \subset X$ é um subconjunto, então a restrição de d a $Y \times Y$ é uma métrica em Y.

$$d : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

Logo Y é tb espaço métrico.

Proposição. Seja V um espaço vetorial munido de uma norma $\|\cdot\|$. Então V é um espaço métrico munido da métrica d definida por:

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

prova:

(1) $d(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)\cdot(x-y)\| = |-1|\cdot\|x-y\| = d(x,y)$.

(2) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y$.

$d(x,x) = 0$

Se $d(x,y) = 0$ então $\|x-y\| = 0 \therefore x-y = 0 \Rightarrow x = y$.

(3) $d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$.

$\blacksquare$

• Como consequência imediata da proposição anterior, podemos definir duas métricas distintas em $\mathbb{R}^n$ de forma imediata.

$$d_1(x,y) := \|x-y\| \quad , \quad d_2(x,y) = \|x-y\|_{sup} .$$

Elas são chamadas respectivamente de métrica euclidiana e métrica do sup.

No que segue sempre trabalharemos com métricas em $\mathbb{R}^n$ que são induzidas por uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$, ou seja, d será da forma:

$$d(x,y) = \|x-y\| .$$

Bolas e conjuntos limitados.

definição: Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$. Dado um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e um real $r>0$, uma bola aberta de centro em a e raio $r>0$ é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor do que r:

$$B(a,r) := \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < r \}$$

A bola fechada é definida por:

$$B[a,r] = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq r \},$$

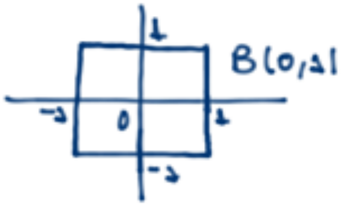
e a esfera $S[a,r]$ é definida por:

$$S[a,r] = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| = r \}.$$

Exemplo.

1) Considere $\mathbb{R}^2$ com a norma euclidiana. Então:

2) Considere $\mathbb{R}^2$ com a norma do sup. Então:



<u>definição</u>: Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se <u>limitado</u> quando existe um número real $c > 0$ tal que

$$X \subset B[0,c].$$

Lembremos que a norma euclidiana e a norma do sup tinham uma relação:

$$\|x\|_{sup} \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\cdot\|x\|_{sup}.$$

Então se X é um conjunto limitado na norma euclidiana X também é limitado na norma do sup e vice-versa.

<u>Teorema</u>. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado na norma euclidiana ou na norma do sup, se e somente se suas projeções

$$X_1 = \pi_1(X), \cdots, X_n = \pi_n(X)$$

são conjuntos limitados em $\mathbb{R}$.

As projeções $\pi_1, \ldots, \pi_n$ são definidas por:

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x_i \qquad \text{onde} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

prova:
Em primeiro lugar observe que dados conjuntos $C_1, \ldots, C_n \subset \mathbb{R}$ e $X \subset \mathbb{R}^n$ então:

$$X \subset C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n \iff \pi_i(X) \subset C_i \quad , \forall\, i.$$

Tome a norma do sup d. Então, X é limitado $\iff$ para algum $c > 0$ tem-se

$$X \subset B[0,c] = [-c,c] \times [-c,c] \times \cdots \times [-c,c] \iff$$

$$\iff \pi_1(X) \subset [-c,c], \ldots, \pi_n(X) \subset [-c,c] \quad \blacksquare$$

Sequências no espaço euclidiano.

Uma seq. em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Geralmente indicamos

$$x_k := x(k)$$

e chamamos x_k de o k-ésimo elemento da sequência.
Usaremos as notações $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ para indicar a seq.

def. Dizemos que uma seq. $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada se o cjto dos seus termos é limitado em $\mathbb{R}^n$, ou seja, existe um número real $c > 0$ tal que.

$$x_k \in B[0,c] \quad , \forall\, k \in \mathbb{N}. \quad (\text{equivalentemente: } \|x_k\| \le c).$$

• Uma seq. (x_k) em $\mathbb{R}^n$ equivale a n sequências de números reais.

Para cada k temos $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$

As sequências $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq n$, são chamadas sequências das coordenadas.

def (limite) Dizemos que $\lim_{k \to \infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, $\exists$ $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x_k \in B(a, \varepsilon) \quad \forall k > k_0 .$$

As vezes denotaremos por $x_k \to a$.

• Quando existir o limite $a = \lim x_k$ diremos que a sequência (x_k) é convergente. Caso contrário ela é chamada divergente.

Observe que da definição de convergência segue que toda sequência convergente é limitada.

Exercício.

1. Mostre que se $x_k \to a$ então qualquer subsequência x_{k_i} de x_k tb converge para a.

2. Mostre que o limite de uma seq. convergente é único. Ou seja, se

$$\lim x_k = a \quad e \quad \lim x_k = b \quad \text{então} \quad a = b .$$