Introdução à Análise no $\mathbb{R}^n$.

Revisão de álgebra linear

<u>definição</u>: Um conjunto V munido de duas operações,

Soma: $$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(u, v) \longmapsto u+v$$

Produto por escalar: $$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha, v) \longrightarrow \alpha \cdot v$$

é dito um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ se as seguintes propriedades valem para todos os vetores $x, y, z \in V$ e todos os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(1) $x + y = y + x$ (comutativa da soma)

(2) $x + (y+z) = (x+y) + z$ (associativa)

(3) $\exists!\ 0 \in V$ tal que $x + 0 = x \ \forall x \in V$ (elemento neutro / nulo)

(4) $x + (-1) \cdot x = 0$ (elemento oposto)

(5) $1 \cdot x = x$ (elemento unitário / identidade)

(6) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ (associativa produto)

(7) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (distributiva 1)

(8) $\alpha (x+y) = \alpha x + \alpha y$ (distributiva 2)

Exemplos.

1. $\mathbb{R}^n$ com as operações usuais:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n)$$

é espaço vitorial.

2. O espaço $\mathbb{R}^\infty$ dado por: $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) : x_i \in \mathbb{R}\ \forall i \geq 1\}$ com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, é um espaço vitorial

3. O espaço das matrizes reais $m \times n$, denotado por $M(m \times n)$, é um espaço vitorial com as operações usuais, isto é:

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}), \quad \alpha \cdot A := (\alpha \cdot a_{ij})$$

O elemento neutro é a matriz nula e dada uma matriz $A = (a_{ij})$, sua oposta é a matriz $-A = (-a_{ij})$.

4. Seja X um conjunto não vazio qualquer. Denotaremos por $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ o espaço de todas as funções reais $f : X \to \mathbb{R}$.

$\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ munido com a soma de funções: $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ e com o produto por escalar: $(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x)$,

é um espaço vitorial real.

Exercício: Mostre que se $X = \{1, 2, \dots, n\}$ então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$, ou seja, existe uma função bijetora

$$h : \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n .$$

Exercício 2. Mostre que são validas :

(1) Se $w + u = w + v$ então $u = v$.

(2) Dados $0 \in \mathbb{R}$, $v \in V$ tem-se : $0 \cdot v = 0$. Analogamente, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 \in V$ tem-se : $\alpha \cdot 0 = 0$.

(3) Se $\alpha \neq 0$ e $v \neq 0$ então $\alpha \cdot v \neq 0$.

definição (subespaço) Seja V um espaço vetorial . Um subconjunto $W \subset V$ é chamado de subespaço linear (ou subespaço vetorial) de V se :

(1) $\forall\, x, y \in W$, $\quad x + y \in W$

(2) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $x \in W \Rightarrow \alpha \cdot x \in W$.

Exemplo. $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

definição: Seja V um espaço vetorial. Dizemos que um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ gera V se para cada $v \in V$ existe uma m-úpla de escalares $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ tal que:

$$v = c_1 \cdot v_1 + \dots + c_m \cdot v_m \quad .$$

Neste caso dizemos que v pode ser escrito como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_m$.

definição (ind. linear) Dizemos que $v_1, \dots, v_m$ são vetores linearmente independentes se a única m-úpla de escalares $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ satisfazendo

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_m \cdot v_m = 0$$

é a m-úpla nula, isto é, $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = (0, \dots, 0)$.

definição (base): Se $\{v_1, \dots, v_m\}$ é L.I e gera V dizemos que $\{v_1, \dots, v_m\}$ é uma base de V.

Exemplo. Uma base para o espaço $\mathbb{R}^n$ (chamada base usual ou base standard) é:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Teorema. Suponha que V tem uma base formada por m vetores. Então qualquer conjunto de vetores que gera V tem pelo menos m vetores e qq conjunto de vetores independentes tem no máximo m vetores. Em particular, qq base para V tem exatamente m vetores.

demonstração. Exercício – Lista 1.

defi: Seja V um esp. vetorial com uma base formada por m vetores, dizemos que m é a dimensão de V.

Teorema. Seja V um espaço vetorial de dimensão m. Se W é um subespaço de V (diferente de V), então W tem dimensão menor que m. Além disso, qualquer base $v_1, \dots, v_k$ pode ser extendida a uma base $v_1, \dots, v_k; v_{k+1}, \dots, v_m$ de V.

Produto Interno

definição: Seja V um espaço vetorial. Um produto interno em V é uma função

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle$$

que satisfaz:

i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

ii) $\langle x + y ; z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$

iv) $\langle x, x \rangle > 0 \quad \forall \; x \neq 0.$

Exemplo. Em $\mathbb{R}^n$ o produto interno mais comum (as vezes chamaremos de prod. interno usual) é definido por:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n .$$

definição: (Norma) Seja V um espaço vetorial. Uma norma em V é uma função:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \|x\|$$

que satisfaz:

(1) $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$

(2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Se V é um espaço vetorial com um produto interno, então podemos definir em V uma norma que vem desse produto interno:

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}. \qquad (*)$$

Exercício. Prove que $(*)$ realmente define uma norma (Para isto vc precisa provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz - veja lista 1).

Em $\mathbb{R}^n$ podemos definir tb a norma do sup:

$$\|x\|_{sup} := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Exercício. Prove que não existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que induz a norma do sup.

Exercício. Prove que $\|x\|_{sup} \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_{sup}$.

Norma no espaço de matrizes

Podemos definir, no espaço de matrizes $n \times m$, uma norma similar à norma do sup.

Seja A uma matriz $n \times m$ com entradas a_{ij}, definimos:

$$|A| = \max\{|a_{ij}| : i = 1, \dots, n \; ; \; j = 1, \dots, m\}.$$

Teorema. Se A é uma matriz $n \times m$ e B $m \times p$ então

$$|A \cdot B| \leq m \cdot |A| \cdot |B|.$$

prova:

Seja $C = (c_{ij}) = A \cdot B$ então: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Logo, se ij é tal que: $|C| = |c_{ij}|$ então

$$|C| = \left| \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^{m} \max\{|a_{ij}|\} \cdot \max\{|b_{ij}|\} = m \cdot |A| \cdot |B|. \quad \blacksquare$$

Transformações lineares

Sejam V e W espaços vetoriais, uma função $T: V \to W$ é chamada de transformação linear se ela satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $T(x+y) = T(x) + T(y)$
(2) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

$\forall\, x, y \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

• Se T for transformação linear bijetora dizemos que T é um isomorfismo linear.

<u>Proposição</u>: Se T e S são lineares então $T \circ S$ é linear. Se T é isomorfismo linear então T^{-1} é linear.

Uma transformação linear é unicamente determinada pelos seus valores nos elementos da base.

<u>Teorema</u>. Seja V um espaço vetorial com base $v_1, v_2, \dots, v_m$. Seja W um espaço vetorial. Dados quaisquer m vetores $u_1, u_2, \dots, u_m \in W$, existe exatamente uma transformação linear $T: V \to W$ tal que, para todo i,

$$T(v_i) = u_i \quad .$$

• Uma matriz $1 \times n$ é chamada matriz linha. É óbvio que há uma correspondência destas matrizes com $\mathbb{R}^n$:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto [x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n]$$

• Uma matriz $n \times 1$ é chamada matriz coluna e ~~tb~~ há uma correspondência óbvia com $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

– Suponha que representemos elementos de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ em forma de matrizes coluna.

Seja A uma matriz $n \times m$ fixada, defina $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pela equação

$$T(x) = A \cdot x$$

É fácil mostrar que T é uma transformação linear.

Teorema. Toda transf. linear tem essa forma.

Dada T, considere os vetores $v_1 = T(e_1), \dots, v_m = T(e_m)$. Então, seja A a matriz $n \times m$:

$$A = (v_1 \;\; v_2 \dots \; v_m)$$

temos

$$A \cdot e_i = v_i$$

Logo do teorema anterior segue que $T(v) = A \cdot v$ ■

Posto de uma matriz e processo de redução de Gauss – Jordan.

<u>Posto coluna</u>: Dimensão do espaço gerado pelas colunas de uma matriz

<u>Posto linha</u>: Dimensão do espaço gerado pelas linhas de uma matriz.

<u>Teorema</u>. Para qualquer matriz $A^{m\times n}$, o posto linha é igual ao posto coluna de A.

<u>prova</u>: Seja p o posto coluna de $A=(a_{ij})$ então existem p vetores

$$w_k = (b_{1k}, \dots, b_{mk}) \in \mathbb{R}^m$$

tais que cada uma das colunas $v_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$, $1 \le j \le n$, é comb linear de $w_1, \dots, w_p$:

$$v_j = \sum_{k=1}^{p} c_{kj}\, w_k \quad , \ 1 \le j \le n. \qquad (*)$$

Tomando a i-ésima coordenada de cada membro de $(*)$ temos:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} c_{kj} \cdot b_{ik} \quad , \ 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n \\ &= \sum_{k=1}^{p} b_{ik} \cdot c_{kj} \qquad (**) \end{aligned}$$

Seja $z_k := (c_{k1}, \dots, c_{kn})$ então $(**)$ implica que os vetores linha de A são combinações lineares de $z_1, z_2, \dots, z_p$. Portanto posto linha $\le p =$ posto coluna. Fazendo o mesmo argumento para A^t concluímos que posto linha $=$ posto coluna. ∎