# Introdução à Análise no $\mathbb{R}^n$
# Provinha 1

**Questão 1:**

**a)** (0.5) Defina o que é uma norma em um espaço vetorial.

**b)** (1.5) Prove que a seguinte função é uma norma em $\mathbb{R}^n$

$$|\cdot| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$|x| := |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|, \text{ onde } x = (x_1, ..., x_n).$$

Esta norma é chamada norma da soma.

**c)** (2.0) Mostre que a norma da soma é equivalente à norma do sup $||\cdot||_{sup}$.

*Obs: Lembre-se que a norma do sup é dada por:*

$$||x||_{sup} = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

*onde* $x = (x_1, ..., x_n)$

**Questão 2:** Dada uma norma $||\cdot||$ em $\mathbb{R}^n$.

**a)** (0.6) Defina os conceitos de: bola aberta, bola fechada e conjunto limitado em $\mathbb{R}^n$.

**b)** (1.0) Defina o que é uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}^n$.

**c)** (2.5) Mostre que toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua.

**d)** (1.4) Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua. Mostre que $f(Y) \subset \mathbb{R}^m$ é limitado.

**Questão 3:** Considere $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear e $A$ a matrix que a representa (ou seja: $T(v) = A \cdot v$ ).

**i)** (0.2) Suponhamos que $v_1, v_2, ..., v_k \in \mathbb{R}^n$ são vetores não nulos tais que:

$$T(v_i) = \lambda_i \cdot v_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

para certos valores reais não nulos $\lambda_1, ..., \lambda_k$ distintos entre si. Mostre que os vetores $v_1, v_2, ..., v_k$ são L.I.

**ii)** (0.1) Usando o item $(i)$ mostre que o conjunto

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0, \text{ tal que } T(v) = \lambda \cdot v\}$$

tem no máximo uma quantidade finita de elementos.

**iii)** (0.2) Seja $I$ a matriz identidade $n \times n$. Mostre que se $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0,$$

então $\lambda \in \Lambda$.

**iv)** (1.0) Mostre que toda matrix $n \times n$ com entradas reais é limite de uma sequência de matrizes invertíveis.