Introdução à Análise no $\mathbb{R}^n$
Terceira Lista

Prof. Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1 A regra da cadeia

Problema 1: Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Dadas as aplicações diferenciáveis $f : U \to \mathbb{R}^n$, $g : U \to \mathbb{R}^p$ e $T : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, defina a função real $\varphi : U \to \mathbb{R}$, pondo para cada $x \in U$, $\varphi(x) =< T(x) \cdot f(x), g(x) >$, onde $< \cdot, \cdot >$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^p$. Calcule a derivada $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Problema 2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{R}^p$ aplicações duas vezes diferenciáveis. Dado $x \in U$, seja $y = f(x) \in V$. Demonstre a seguinte igualdade:

$$(g \circ f)''(x) = g''(x) \cdot f'(x) \cdot f'(x) + g'(y) \cdot f''(x).$$

Problema 3. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável. Supondo que $f(tx) = tf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e todo $t \in \mathbb{R}$, prove que f é uma transformação linear. Suponha agora que f é duas vezes diferenciável e que $f(tx) = t^2 f(x)$ para todos $x \in \mathbb{R}^m$ e $t \in \mathbb{R}$. Mostre que f é uma aplicação quadrática, isto é, que existe $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ bilinear tal que $f(x) = B(x, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Generalize.

Problema 4. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Dada $f : U \to \mathbb{R}^n$ duas vezes diferenciável, e dado $k \in \mathbb{R}^m$, a aplicação $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, definida por $\varphi(x) = f'(x) \cdot k$, é diferenciável e $\varphi'(x) \cdot h = (f''(x) \cdot h) \cdot k$.

Problema 5. Considere $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, tal que $f(tx) = t^k f(x)$ quaisquer que sejam $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^m$. Dizemos então que f é k-homogênea.

Mostre que cada uma de suas derivadas $f^{(i)}$ é $(k-i)$-homogênea $(0 \leq i < k)$ e que $f^{(k)}$ é constante. Mostre também que, para cada $x \in \mathbb{R}^m$, temos

$$f^{(i)}(x) = \frac{f^{(k)}(0)}{(k-i)!} \cdot x^{(k-i)},$$

o que significa

$$f^{(i)}(x) \cdot (h_1, ..., h_i) = \frac{1}{(k-i)!} f^{(k)}(0) \cdot (x, ..., x, h_1, ..., h_i),$$

onde o x aparece $k-i$ vezes do lado direito da expressão.

Problema 6. Aplique o resultado do problema 5 para a função $f : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ dada por $f(X) = X^k$ e conclua que

$$|f^{(i)}(X)| \leq \frac{k!}{(k-i)!} |X|^{k-i}.$$

Problema 7. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ uma bola aberta de centro 0. Uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ chama-se par quando $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in U$. Dizemos que f é ímpar quando $f(-x) = -f(x)$. Se f é par, suas derivadas de ordem par também o são, e suas derivadas de ordem ímpar são ímpares. Em particular $f^{(k)}(0) = 0$ se $k = 2i + 1$. Obter enunciado análogo para f ímpar.

2 Desigualdade do valor médio

Problema 8. Enuncie e demonstre o Teorema do Valor Médio para funções reais, ou seja, para funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas e diferenciáveis.

Problema 9. Enuncie e demonstre a Desigualdade do Valor Médio para funções $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, onde U é conjunto aberto.

Problema 10. Seja $0 < a < 1$. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + x^2 \sin(1/x)$ quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ é diferenciável e $f'(0) = a$. Entretanto f não é bijetora em vizinhança alguma de zero.

Problema 11. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $f'(x)$ é injetiva em todos os pontos x de um compacto $K \subset U$, então existem $c > 0$, $\delta > 0$ tais que

$$|f(x+h) - f(x)| \geq c|h|$$

quaisquer que seja $x \in K$ e $|h| < \delta$.

Problema 12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de classe C^1. Defina $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pondo

$$F(x,t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

quando $t \neq 0$ e $F(x,0) = f'(x)$. Demonstre que F é uma função contínua.

Problema 13. Considere a expressão

$$f(x,y) = \left(\log xy, \frac{x+y}{2}\right),$$

onde x, y são números reais. Determine um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que

i) $f : U \to \mathbb{R}^2$ seja bem definida;

ii) $||f(q) - f(p)|| \leq |q - p|$ para todos $p, q \in U$ com normas $||\ ||$ e $|\ |$ convenientemente escolhidas.

Seja corajoso e tome U o maior que puder.

Problema 14. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se existe $f''(0) = 0$ e, além disso, $f(0) = f'(0) = 0$, então

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{|x|^2} = 0.$$

Problema 15. Se $f : U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e existe $f''(a)$ para algum $a \in U$, então supondo que $f''(a)$ é uma aplicação bilinear simétrica, prove que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{1}{2} f''(a)(h,h) + r(h),$$

onde $\lim_{h \to 0} r(h)/|h|^2 = 0$.
Dica: Aplique o problema 14 sobre a função $r(x)$.