Introdução à Análise no $\mathbb{R}^n$
Segunda Lista

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1 Funções Diferenciáveis

Problema 0**:** Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Defina o conceito de aplicação diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^n$ em $x \in U$.

Problema 1. Usando a fórmula

$$f'(x) \cdot h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

e admitindo a existência das derivadas em questão, calcule:

a) $f'(z) \cdot h$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por

$$f(x, y) = (x^2 + y, x + y^2), z = (4, -1), h = (1, 2).$$

b) $\varphi'(x) \cdot v$, onde $x, v \in \mathbb{R}^m$ são vetores arbitrários e $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$, sendo $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funcionais lineares.

c) $\psi'(x) \cdot h$, onde $h \in \mathbb{R}^m$ é um vetor arbitrário e $\psi : U \to \mathbb{R}$ é definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ do modo seguinte: são dadas $f, g : U \to \mathbb{R}^p$ diferenciáveis e $\psi(x) =< f(x), g(x) >$, para todo $x \in U$, é um produto interno dos vetores $f(x)$ e $g(x)$.

Problema 2. O exercício anterios mostra que, se existirem as derivadas $f'(z), \varphi'(x)$ e $\psi'(x)$, elas devem ter as formas ali obtidas. Prove agora que as 3 derivadas existem.

Problema 3. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Dada $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no ponto $x_0 \in U$, considere uma bola aberta $B(x_0; \delta)$, de centro x_0 e raio δ, contida em U. Prove que a aplicação $r : B(0; \delta) \to \mathbb{R}^n$, definida por $r(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h$, é diferenciável no ponto $h = 0$.

Problema 4. Sejam $V \subset U$ aberto em $\mathbb{R}^m$ e $\delta > 0$ um número tal que $x \in V$, $|h| < \delta$ implicam $x + h \in U$. Indique com B a bola aberta em $\mathbb{R}^m$ com centro 0 e raio δ. Se $f : U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em todos os pontos de U, então, fixado $x_0 \in V$, a aplicação $r : V \times B \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$r(x, h) = f(x + h) - f(x) - f'(x_0) \cdot h$$

é diferenciável em todos os pontos de $V \times B$.

Problema 5. Seja E o espaço das matrizes $n \times n$ (ou seja, $\mathbb{R}^{n^2}$). Defina $f : E \to E$ pondo $f(X) = X^3$ para cada matriz X. Mostre que f é diferenciável em todos os pontos de E.

Problema 6. Usando coordenadas polares, defina a função real $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pondo $f(x \cdot e^{iy}) = \left(\frac{x}{y}\right)^2$, $x \geq 0$, $0 < y \leq 2\pi$. Prove que f não é contínua na origem, muito embora se tenha

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(th)}{t} = 0$$

para todo vetor $h \in \mathbb{R}^2$.

Problema 7. Diga se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira demonstre e se for falsa dê um contra-exemplo.
“ Seja $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Se existe uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$A \cdot h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

para todo $h \in \mathbb{R}^m$, então f é diferenciável em x.”

Problema 8. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, zy)$,

a) Prove que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ e calcule sua matriz jacobiana.

b) Mostre que a derivada $f'(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ é uma transformação linear injetiva, exceto no eixo dos z (isto é, para $x = y = 0$).

c) Determine a imagem de $f'(0,0,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

Problema 9**.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Considere a transformação linear $T = f'(3, \pi/6) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, e os vetores $h = (1,0), k = (1,1)$. Qual é o ângulo formado pelos vetores $T^{100} \cdot h$ e $T^{101} \cdot k$?

Problema 10**.** Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3).$$

Mostre que a transformação linear

$$f'(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

é invertível, salvo se duas das coordenadas x, y, z são iguais.

Problema 11**.** Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Defina $\varphi : U \to U \times \mathbb{R}^n$ e $F : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pondo

$$\varphi(x) = (x, f(x))$$

e

$$F(x,y) = f(x) - y.$$

Mostre que φ e F são diferenciáveis, exprima suas derivadas, conclua que $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $x \in U$ e que o núcleo de $F'(x,y) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ coincide com a imagem de $\varphi'(x)$.

Problema 12**.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (x^2, y^2, (x+y)^2)$. Mostre que

$$f'(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

tem posto 2, exceto na origem.
Nota: Dizer que $f'(x,y)$ tem posto dois em (x_0,y_0), significa dizer que $\{f'(x_0,y_0) \cdot e_1, f'(x_0,y_0) \cdot e_2\}$ é L.I.

Problema 13**.** Mostre que a derivada da aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$f(x,y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$$

é uma transformação linear invertível.

Problema 14. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Se $f : U \to \mathbb{R}$ atinge um máximo (ou mínimo) relativo no ponto $x \in U$, e f é diferenciável no ponto x, então $f'(x) = 0$.

Problema 15. Se $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável num aberto limitado $U \subset \mathbb{R}^m$ e, para todo $a \in \overline{U} - U$ tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, então existe algum $x_0 \in U$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Problema 16. Seja $E = \mathbb{R}^{n^2}$ o espaço vetorial formado pelas matrizes $n \times n$. Indicando com X^* a transposta de uma matriz X, considere a aplicação $f : E \to E$ definida por $f(X) = XX^t$. Descreva a derivada

$$f'(X) : E \to E.$$

Mostre que $f'(X) \cdot H$ é simétrica, para cada $H \in E$, e que se X é ortogonal (isto é, $X^t = X^{-1}$) então, para toda matriz simétrica S, existe pelo menos uma matriz H tal que $f'(X) \cdot H = S$.

Problema 17.

a) Defina o que é dizer que uma aplicação $f : \mathbb{R}^m \times ...\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (o produto de $\mathbb{R}^m$ é feito p-vezes) é p-linear.

b) Determine a derivada de uma aplicação p-linear $f : \mathbb{R}^m \times ...\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

c) Seja E o espaço vetorial formado pelas matrizes $n \times n$. Considere a função real $f : E \to \mathbb{R}$ definida por $f(X) = \det(X)$. Dados $X, H \in E$ calcule $f'(X) \cdot H$. Conclua que

$$f'(I) \cdot H = \mathrm{Tr}(H)$$

onde I =matriz identidade $n \times n$, $\mathrm{Tr}(H)$ = Traço de H = soma dos elementos da diagonal.

d) Mostre que $\det'(X) = 0$ se, e somente se, o posto de X é $\leq n - 2$.

Problema 18. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por: $f(0) = 0$ e

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

se $(x, y) \neq (0, 0)$.

a) f é diferenciável em 0?

b) f é contínua em 0?

Problema 18. Repita o problema 18 para as funções:

1. $f(0) = 0$, $f(x, y) = x^2y^2/(x^2y^2 + (y - x)^2)$ se $(x, y) \neq (0, 0)$.
2. $f(0) = 0$, $f(x, y) = x^3/(x^2 + y^2)$.
3. $f(x, y) = |x| + |y|$.

2 Derivadas de ordem superior

Problema 19. Mostre que a função $f(x, y) = |xy|$ é diferenciável em 0, mas não é de classe C^1 em qualquer vizinhança de 0.

Problema 20. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ colocando $f(0) = 0$ e

$$f(t) = t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right), \text{ se } t \neq 0.$$

a) Mostre que f é diferenciável em 0, e calcule $f'(0)$.

b) Calcule $f'(t)$ se $t \neq 0$.

c) Mostre que f' não é contínua em 0.

d) Conclua que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ mas não é de classe C^1 em $\mathbb{R}$.

Problema 21. Diga se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira demonstre, se for falsa dê um contra-exemplo.

( ) Toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ é de classe C^1.

( ) Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são ambas de classe C^1 então $f \cdot g$, $f \circ g$ e $f + g$ são de classe C^1.

( ) Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são ambas de classe C^1 então a função: $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $h(0) = 0$ e $h(x) = f(x)/g(x)$ se $x \neq 0$ é de classe C^1.

Problema 22. Dado $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função real 3 vezes diferenciável no ponto $x \in U$. Mostre que $f'''(x) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é a forma trilinear definida por

$$f'''(x) = \sum_{i,j,k=1}^{m} \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}(x) dx^i dx^j dx^k.$$

Problema 23. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = 3x^2+2y^2+2xz+z^2$. Para um ponto arbitrário $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, determine $f''(p) \cdot (h, k)$, onde $h, k \in \mathbb{R}^3$. Mostre que

$$f''(p) \cdot (h, h) > 0$$

se $h \neq 0$.

Problema 24. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = e^{2x}(\cos^2 y - \sin^2 y)$. Considere a forma bilinear $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde $A = f''(0, 0)$. Determine dois vetores $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ tais que

$$A(u, u) > 0 \text{ e } A(v, v) < 0.$$

Problema 25. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = xyz$. Calcule

$$\begin{aligned} f' &: \mathbb{R}^3 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \\ f'' &: \mathbb{R}^3 \to \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \\ f''' &: \mathbb{R}^3 \to \mathcal{L}_3(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Problema 25. Seja $k \geq 1$ um número natural e $f : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ definida por $f(X) = X^k$. Prove que

$$|f^{(i)}(X)| \leq \frac{k!}{(k-i)!}|X|^{k-i}.$$

Problema 26. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ k-vezes diferenciável e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linear. Para cada $j = 0, 1, ..., k$, tem-se

$$(T \circ f)^{(j)} = T \circ f^{(j)}.$$

Problema 27. Seja $A : \mathbb{R}^m \times ... \times \mathbb{R}^m$ p-linear. Defina $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ pondo

$$f(x) = \frac{1}{n!}A(x, x, ..., x).$$

Calcule as derivadas sucessivas $f^{(j)}(x)$, $j = 1, 2, ...$.