Introdução à Análise no $\mathbb{R}^n$
Primeira Lista

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1 Revisão de álgebra linear

Problema 0:

- Defina :
  - Espaço vetorial.
  - Independência linear e dependência linear.
  - Base de um espaço vetorial e dimensão.
  - Transformação linear.
- Demonstre o seguinte Teorema:

  Teorema: *Seja V um espaço vetorial com uma base formada por m vetores. Então, qualquer conjunto de vetores que gera V tem pelo menos m vetores e qualquer conjunto de vetores independentes tem no máximo m vetores. Em particular, qualquer base de V tem exatamente m vetores.*

  Dica: Lembre-se que todo sistema linear homogêneo cujo número de incógnitas é maior que o número de equações tem uma solução não-trivial.

Problema 1. Seja V um espaço vetorial com produto interno $< x, y >$ e norma $\|x\| :=< x, x >^{1/2}$.

1. Prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$| < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||,$$

   para todo $(x, y) \in V \times V$.

2. Prove que

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||,$$

   para todos $x, y \in V$.

3. Prove que

$$||x - y|| \geq ||x|| - ||y||,$$

   para todos $x, y \in V$.

Problema 2. Considere em $\mathbb{R}^2$ a função $|| \cdot ||_{sup} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por: para cada $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$||x||_{sup} := \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

1. Prove que $|| \cdot ||_{sup}$ define uma norma em $\mathbb{R}^2$.

2. Prove que esta norma não vem de nenhum produto interno, ou seja, não existe um produto interno $< \cdot, \cdot >$ em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$||x||_{sup} = < x, x >^{1/2} .$$

   Dica: Suponha que exista tal produto interno. Calcule $< x \pm y, x \pm y >$ e aplique para o caso: $x = e_1$ e $y = e_2$.

Problema 3.

(a) Sejam (x_1, x_2) e $y = (y_1, y_2)$ pontos quaisquer em $\mathbb{R}^2$, mostre que a função:

$$< x, y > = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

(b) Mostre que a função:

$$< x, y >= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, $b^2 - ac < 0$ e $a > 0$.

Problema 4. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções reais $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Mostre que $\mathcal{F}$ é um espaço vetorial se a adição e a multiplicação por escalares forem definidas por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x).$$

Problema 5. Considere $\mathcal{F}$ o conjunto definido no problema 4. Sejam

- $\mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}$ o conjunto de todas as $f \in \mathcal{F}$ limitadas;
- $\mathcal{F}_c$ o conjunto de todas as funções reais $f \in \mathcal{F}$ contínuas;
- $\mathcal{F}_I$ o conjunto de todas as funções reais $f \in \mathcal{F}$ integráveis;
- $\mathcal{F}_D$ o conjunto de todas as funções reais $f \in \mathcal{F}$ de classe C^1 (ou seja: deriváveis e com derivada contínua);
- $\mathcal{F}_P$ o conjunto de todas as funçoes polinomiais $f \in \mathcal{F}$.

Mostre que todos os items são espaços vetoriais com as operações de soma e multiplicação definidas no problema 4.

Problema 6. Nas notações dos problemas 4 e 5, considere as funções $I : \mathcal{F}_I \to \mathbb{R}$ e $D : \mathcal{F}_D \to \mathcal{F}_c$ definidas por:

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx \quad \text{e} \quad D(f)(x) = f'(x).$$

Prove que I e D são transformações lineares.

Problema 7. Mostre que os vetores $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 1)$ e $w = (2, 1, 2)$ são L.D.

Problema 8. Prove que os seguintes polinômios são linearmente independentes:

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 1, \;\; q(x) = 2x^4 + 5x - 6, \;\; r(x) = x^2 - 5x + 2.$$

Problema 9. No espaço de todos os polinômios com coeficientes reais $\mathbb{R}[x]$, um conjunto X tem a propriedade que não existem dois polinômios em $p, q \in X$ com o mesmo grau. Prove que X é L.I.

Problema 10. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso) quanto à validez da afirmação:

"A união de dois subconjuntos L.I. do espaço vetorial E é ainda um conjunto L.I."

( ) Sempre.

( ) Nunca.

( ) Quando um deles é disjunto do outro.

( ) Quando um deles é parte do outro.

( ) Quando um deles é disjunto do subespaço gerado pelo outro.

( ) Quando o número de elementos de um deles mais o número de elementos do outro é igual à dimensão de E.

Nas alternativas em que você assinalou "V'' demonstre a afirmação. Nas alternativas em que você assinalou "F'' dê um contra-exemplo.

Problema 11. Prove que cada um dos conjuntos descritos abaixo é um subespaço do espaço de matrizes reais $n \times n$, $M(n)$. Depois, obtenha uma base e consequentemente calcule a dimensão de cada um dos subespaços.

a) Matrizes cuja soma dos elementos da diagonal é zero.

b) Matrizes que têm a primeira e a última linha iguais.

c) Matrizes cuja segunda linha é igual à terceira coluna.

d) Matrizes nas quais a soma dos elementos da primeira linha é igual à soma dos elementos da segunda coluna.

Problema 12. Seja E um espaço vetorial e $u, v \in E$ dois vetores linearmente independentes. Dado $\alpha \neq 0$, prove que o conjunto de dois elementos $\{v, v + \alpha u\}$ é uma base do subespaço gerado pelos vetores $v, v+u, v+2u, v+3u, ..., v+nu, ...$

Problema 13. Seja r uma reta em $\mathbb{R}^n$. Prove que a aplicação $P : \mathbb{R}^n \to r$ que leva um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ na sua projeção ortogonal sobre r é uma aplicação linear.

Problema 14. Seja v um vetor não-nulo de um espaço vetorial E, de dimensão finita. Dado qualquer espaço vetorial $F \neq \{0\}$, mostre que existe uma transformação linear $A : E \to F$ tal que $Av \neq 0$.

Problema 15. Seja $X = \{v_1, ..., v_m\}$ um conjunto L.I. no espaço vetorial E, de dimensão finita. Dados arbitrariamente os vetores $w_1, w_2, ..., w_m$ no espaço vetorial F, prove que existe uma transformação linear $A : E \to F$ tal que $Av_i = w_i$ para todos $1 \leq i \leq m$. Prove que A é única se, e somente se, X é uma base de E.

Problema 16. Mostre que para todo funcional linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existe um único vetor $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) = < y, x >$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$.

2 Funções vetoriais e topologia do espaço $\mathbb{R}^n$

Problema 17. Se existirem sequências $x_k, y_k \in \mathbb{R}^n$ com $\lim_{k\to+\infty} x_k = a$, $\lim_{k\to+\infty} y_k = b$, e

$$|y_k - a| < r < |x_k - b|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, então $|a - b| = r$.

Problema 18. Prove que $\lim x_k = a$ em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\lim < x_k, y > = < x.y >$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Problema 19. Prove que toda matriz $n \times n$ é limite de uma sequência de matrizes invertíveis $n \times n$.
Dica: Lembre-se que uma matriz é invertível se, e somente se, seu determinante é não nulo.

Problema 20. Mostre que se nenhum ponto do conjunto X é ponto de acumulação então se pode escolher, para cada ponto $x \in X$, uma bola aberta B_x, de centro em x, de tal maneira que, para $x \neq y$ em X se tenha $B_x \cap B_y = \emptyset$.

Problema 21. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ contínuas no ponto $a \in X$. Se $f(a) \neq g(a)$ então existe uma bola B de centro a tal que $x, y \in B \Rightarrow f(x) \neq g(x)$.

Problema 22. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ contínua. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é limitado então $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ é limitado.

Problema 23. Diga se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira prove, se for falsa apresente um contra-exemplo.

( ) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua e $B \subset \mathbb{R}^m$ uma bola aberta, então $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto aberto.

( ) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação bijetora e com inversa contínua. Se $B \subset \mathbb{R}^m$ é uma bola aberta, então $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto aberto.

Problema 24. Mostre que o cone $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Problema 25. Prove que os conjuntos $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 < x < 1\}$ e $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ são homeomorfos mas que não existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $h(X) = Y$.

Problema 26. Diga se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira prove, se for falsa apresente um contra-exemplo.
"Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ dois conjuntos homeomorfos, então existe uma aplicação $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que $h(X) = Y$.

Problema 27. Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ definida num conjunto ilimitado $X \subset \mathbb{R}^m$. Defina o que se entende por $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ e dê uma caracterização deste conceito por meio de sequências.

Problema 28. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ se } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ e } f(0, 0) = 0.$$

Mostre que

$$\lim_{x \to 0}(\lim_{y \to 0} f(x, y)) \neq \lim_{y \to 0}(\lim_{x \to 0} f(x, y)).$$

Problema 29. Mostre que se um aberto A contém pontos do fecho de X então A contém pontos de X.

Problema 30. Dê exemplo de conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}^2$, tais que as projeções de X sobre os eixos são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$, as de Y são fechadas, mas nem X é aberto em $\mathbb{R}^2$ nem Y é fechado.

Problema 31. Prove que o conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado.

Problema 32. Prove que se $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ então $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$ em $\mathbb{R}^{n+m}$.

Problema 33. Prove que o conjunto das matrizes invertíveis $n \times n$ é aberto em $\mathbb{R}^{n^2}$.

Problema 34. Defina conjunto compacto em $\mathbb{R}^n$ e prove que uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é limitada em conjuntos compactos.