• Vejamos o caso de uma função duas vezes dif. com mais profundidade:

• Sua derivada é uma função $f': \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ dada por:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i \, ,$$

onde $\{dx_1, \dots, dx_m\}$ é a notação para a base canônica de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.

• A matriz Jacobiana de $f': \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ é então a matriz com entradas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x) \, .$$

Como transf. linear, a aplicação $f''(x): \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ é caracterizada por:

$$f''(x) \cdot e_i = \frac{\partial f'}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, dx_j \, .$$

– Distinção entre $f''(x)$ e $d^2 f(x)$

Observe que existe um isomorfismo natural $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)) \approx \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ que associa a cada transf. linear $T: \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ a transf. bilinear

$$\tilde{T}: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \qquad \text{tal que} \qquad \tilde{T}(u, v) = (T.u).v$$

isso nos permite considerar a derivada segunda como sendo uma aplicação bilinear: $f''(x): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Considere $d^2f(x)$ a aplic. bilinear associada a $f''(x)$ pelo isomorfismo acima. Ou seja,

$$d^2f(x).(u,v) = (f''(x).u).v \; .$$

Então

$$d^2f(x).(e_i,e_j) = (f''(x).e_i).e_j =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x)\, dx_k \right) . e_j$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) . dx_j(e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Lembremos agora que o espaço $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ tem uma base natural, que consiste nas formas bilineares

$$dx_i \bullet dx_j : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

definidas por $dx_i \bullet dx_j (u,v) = u_i . v_j$, onde $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_m)$.

Portanto:

$$\boxed{d^2f(x)(u,v) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i . dx_j} \; .$$

- Daqui p/ frente não faremos mais distinção entre d^2f e f''.

Derivadas de Ordem Superior

- A definição é indutiva.

Suponhamos que já definimos tudo para $k-1$. Tome $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ e suponha que ela é $(k-1)$-vezes diferenciável.

Então, sua $(k-1)$-ésima derivada é uma aplicação $f^{(k-1)}: \mathcal{U} \to \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

de $\mathcal{U}$ no espaço das aplicações $(k-1)$-lineares de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$.

- Se $f^{(k-1)}$ for diferenciável em um ponto $x \in \mathcal{U}$, diremos que f é k vezes diferenciável neste ponto e, usando o isomorfismo:

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \longrightarrow \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

$$T: \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \longrightarrow G: \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(u_1, \dots, u_k) \mapsto ((\dots(Tu_1)\cdot u_2 \dots)\cdot u_{k-1})\cdot u_k$$

identificaremos $f^{(k)}(x)$ com uma aplicação k-linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, que chamamos de k-ésima derivada de f no ponto x.

- Quando $f^{(k)}(x)$ existe em cada $x \in \mathcal{U}$ dizemos que $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ é k-vezes diferenciável. Fica então definida:

$$f^{(k)}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

Diremos que $\underline{f \in C^k}$, k-vezes continuamente dif., quando $f^{(k)}$ for contínua.

Por conveniência C^0 indicará o cjto das funções contínuas.

2) Toda transf. linear $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^∞, pois

$$f': \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$
$$x \longmapsto f'(x) \equiv f$$

é constante $\therefore$ diferenciável e com $f'' = 0$. Portanto $f^{(k)} = 0 \ \forall \ k \geq 2$.

Analogamente, toda transformação bilinear $g: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é de classe C^∞ pois $g': \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ é uma transf. linear.

3) Seja $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função polinomial, isto é, para $x = (x_1, \dots, x_m)$

temos $f(x) = \sum a_{j_1 \dots j_m} (x_1)^{j_1} \dots (x_m)^{j_m}$. Dado $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$

podemos colocar: $f(x+h) = f(x) + P(x) \cdot h + r(x,h)$,

onde $P(x) \cdot h$ é a soma de todos os termos de $f(x+h)$ cujo grau em h é 1; $r(x,h)$ é a soma de todos os termos cujo grau em h é ≥ 2.

- $P(x)$ desta forma é linear
- r desta forma satisfaz $\frac{r(h)}{|h|} \to 0$.

Então f é diferenciável e $f'(x) = P(x)$. Logo $f' \in C^0$, ou seja, $f \in C^1$.

Mas cada coordenada de f' também é uma função polinomial (pois $P(x)$ pode ser vista como uma matriz onde as entradas são polinômios em x).

Então $f' \in C^1$. Seguindo, segue que $f \in C^\infty$.

- Definimos uma aplicação polinomial $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ como aquela cujas coordenadas são funções polinomiais

- Transformações polinomiais são portanto de classe C^∞.

Definindo o grau de uma função polinomial de forma usual temos que se o grau de $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é p então

$$f^{(k)} = 0 \quad , \forall \ k \geq p+1.$$

Observe que as aplicações p-lineares são aplic. polinomiais de grau p.

(4) Nenhuma das inclusões $C^{k+1}(U, \mathbb{R}^n) \subset C^k(U, \mathbb{R}^n)$ se reduz à igualdade. Tome $U = \mathbb{R}$ e $f_k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases} .$$

- f_0 é desc.
- f_1 é contínua mas ñ dif em 0 $\therefore$ $f_1 \in C^0 - C^1$.

- Como $f_k' = k \cdot f_{k-1}$ temos $f_k \in C^{k-1}$ mas $f_k \notin C^k$.

(5) Se $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $f: J \to \mathbb{R}^n$ é um caminho de classe C^k, então, para cada $j = 1, 2, \dots, k$, a j-ésima derivada $f^{(j)}(x)$ em $x \in J$ é ainda um vetor no $\mathbb{R}^n$.

De fato: $f': J \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ $\therefore$ $\forall \ (j)$, $f^{(j)}: J \to \mathbb{R}^n$.

- O vetor $D^2 f(t) = (D^2 f_1(t), \dots, D^2 f_n(t))$ é chamado aceleração de f no instante t.

A regra da Cadeia

Moral. A derivada da aplicação composta é a composta das derivadas

Teorema (Regra da cadeia)

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável no ponto $x \in \mathcal{U}$, com $f(\mathcal{U}) \subset V$, $g: V \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação diferenciável no ponto $y = f(x) \in V$. Então a aplicação composta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & V \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd} \qquad g\circ f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$$

é diferenciável no ponto x e $(g\circ f)'(x) = g'(y)\circ f'(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.

demonstração: Podemos escrever

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \rho(h)\cdot |h| \ , \text{ com } \lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$$

$$g(y+k) = g(y) + g'(y)\cdot k + \sigma(k)\cdot |k|, \quad \text{com } \lim_{k\to 0} \sigma(k) = 0 .$$

Então:

$$(g\circ f)(x+h) = g(f(x) + f'(x)\cdot h + \rho(h)\cdot |h|)$$

Considere $K := f'(x)\cdot h + \rho(h)\cdot |h|$.

Então temos:

$$(g\circ f)(x+h) = g(f(x)) + g'(f(x)).[f'(x).h + \rho(h).|h|) + \sigma(k).|k|$$

Chame:

$$\tau(h) := g'(y).\rho(h) + \sigma(k).\left|f'(x).\frac{h}{|h|} + \rho(h)\right|.$$

Assim: $(g\circ f)(x+h) = (g\circ f)(x) + [g'(y)\circ f'(x)].h + \tau(h).|h|$.

Basta provar que $\lim_{h\to 0}\tau(h) = 0$. Para isto veja que: $\lim_{h\to 0} g'(y).\rho(h) = 0$ e $\lim_{h\to 0}\sigma(k) = 0$ enquanto $f'(x).\frac{h}{|h|}$ é limitada ∎

Corolário. Se $f: \mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ e $g: V\to\mathbb{R}^p$ são ambas de classe C^k e $f(\mathcal{U})\subset V$ então $g\circ f: \mathcal{U}\to\mathbb{R}^p$ é também de classe C^k.

prova. Seja $\mu: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^p)$ a composição (multiplicação) de transf. lineares. Já vimos que μ é bilinear $\therefore C^\infty$.

Agora observe que:

$$(g\circ f)'(x) = \mu(g'\circ f, f')(x).$$

Suponhamos que o corolário está provado para $k-1$. Então, dadas $f, g\in C^k$, temos $g'\circ f$, $f'\in C^{k-1}$. Portanto $(g\circ f)' = \mu(g'\circ f, f')$ é C^{k-1}.

Ou seja $(g\circ f)$ é C^k ∎

Aplicação

- Inversão de transformação linear é C^∞:

Seja $f: GL(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ a inversão: $f(X) = X^{-1}$.

Por simplicidade, escrevamos $E = \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^m); \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$ e consideremos a aplicação linear

$$g: \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \longrightarrow E$$
$$(Y, Z) \longrightarrow g(Y,Z)\cdot H = Y.H.Z.$$

Sabemos que f é diferenciável e sua derivada é dada por:

$$f' = -g\circ(f,f) : GL(\mathbb{R}^m) \longrightarrow E$$

onde $(f,f)(X) = (f(X), f(X)) = (X^{-1}, X^{-1})$.

Como g é C^∞ então $f' = -g\circ(f,f) \Rightarrow f'$ é diferenciável $\therefore f \in C^1$.

Continuando, concluimos que $f \in C^\infty$.

Cor 2. Seja $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ dif. em $x_0 \in \mathcal{U}$. Dado $v \in \mathbb{R}^m$, seja $x: t \mapsto x(t)$ um caminho em $\mathcal{U}$, dif. em $t=0$, com $x(0) = x_0$

$x'(0) = v$.

Então $f'(x_0).v$ é o vetor velocidade do caminho $f\circ x$ em $t=0$.

prova. De fato, o vet. velo. de $f \circ x$ em $t=0$ é:

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x(0+k)) - f(x(0))}{k} = (f \circ x)'(0)$$

$= f'(x(0)) \cdot x'(0) = f'(x_0) \cdot v$ ■

Corolário. Seja $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $x \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ e suponha que f admite uma inversa $g = f^{-1}: V \to \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ ($f(\mathcal{U}) = V$, $g(V) = \mathcal{U}$), a qual é diferenciável no ponto $y = f(x)$. Então $f'(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo cujo inverso é

$$g'(y): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Em particular, $m = n$.

prova. Temos que provar que $f'(x)$ é bijetora. É suficiente provar que:

$$f'(x) \circ g'(y) = id \quad , \quad g'(y) \circ f'(x) = id.$$

De fato:

$$(f \circ g)' = (id_V)' = id_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow f'(x) \circ g'(y) = id.$$

$$(g \circ f)' = (id_{\mathcal{U}})' = id_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow g'(y) \circ f'(x) = id \quad ■$$

Corolário. (Antiga regra da cadeia)
Suponha que $f=(f_1,\dots,f_n)$ e $g=(g_1,\dots,g_p)$. Então, para cada $i=1,\dots,p$ e $j=1,\dots,m$ temos:

$$\frac{\partial(g_i\circ f)}{\partial x_j}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial y^k}(f(x))\,\frac{\partial f_k}{\partial x^j}(x).$$

prova. $f'(x)\cdot h=Jf(x)\cdot h$, $g'(y)\cdot h=Jg(y)\cdot h$

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\circ f'(x)=Jg(f(x))\cdot Jf(x)$$

Então:

$$\frac{\partial(g_i\circ f)}{\partial x_j}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_i(f(x))}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x^j}(x) \quad \blacksquare$$

Obs. Se $U\subset\mathbb{R}^m$ e $f:U\to\mathbb{R}^m$ é dif. no ponto $x\in U$, então sua derivada

$f'(x):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ $\therefore$ faz sentido falar no seu determinante.

- Este determinante, $\det(f'(x))$, é chamado de determinante jacobiano de f em x.

Exemplo. (Função C^∞ sem inversa diferenciável)

Tome $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=t^3$. Já sabemos que é C^∞ e que $f'(x)=\frac{1}{3}t^2$.

A inversa $g(s) = \sqrt[3]{s}$ não pode ser diferenciável em 0 pois $f'(0) = 0$ não é um isomorfismo.

Corolário (Regras de diferenciação) Sejam $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ diferenciáveis no ponto $x \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

(1) $f + g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ e $\lambda . f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ são diferenciáveis no ponto x, com

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad , \quad (\lambda f)'(x) = \lambda . f'(x).$$

(2) Quando $n = 1$ e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{U}$, então $\frac{1}{f} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto x e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{1}{f(x)^2} \cdot f'(x).$$

(3) Se $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é bilinear então $B(f, g) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$, dada por

$$B(f,g)(y) = B(f(y), g(y)) \quad ,$$

é diferenciável no ponto x e $B(f,g)'(x).h = B(f'(x).h, g(x)) + B(f(x), g'(x).h)$.

Em particular se $n = 1$ e $\begin{array}{l} B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (a, b) \to a.b \end{array}$ então:

$$(f.g)'(x) = B(f,g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) \quad .$$

Exercício: Demonstre este corolário.

Obs. As vezes denotaremos aplicações bilineares da mesma forma que produtos, isto é, ao invés de escrever $B(x,y)$ escreveremos $x \cdot y$.

Exemplo. (Diferenciabilidade de prod. internos e normas)

$$\langle f,g\rangle : U \to \mathbb{R} \quad , \quad \langle f,g\rangle(x) = \langle f(x), g(x)\rangle .$$

Como $\langle \cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é bilinear, a dif de f e g implica a dif. de $\langle f,g\rangle$. Ainda:

$$\langle f,g\rangle'(x).h = \langle f'(x)\cdot h, g(x)\rangle + \langle f(x), g'(x).h\rangle \quad , \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^m.$$

- Se tomarmos $f=g$ temos que a f$\underline{s}$ $|f|^2 : y \to \langle f(y), f(y)\rangle$ é diferenciável e sua derivada é:

$$h \longmapsto 2\langle f'(x).h, f(x)\rangle .$$

- Como $t \to t^{1/2}$ é dif. em $\mathbb{R}-\{0\}$, segue que:

$$(\star) \qquad |\cdot| : u \mapsto |u| = \langle u,u\rangle^{1/2} \text{ é dif. em } \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Exercício. A derivada da função $|\cdot|$ em $(\star)$ é dada por

$$|\cdot|' : h \longmapsto \frac{\langle h, u\rangle}{\langle u,u\rangle^{1/2}}.$$

Mais precisamente as funções $u \mapsto |u|^2$ e $u \mapsto |u|$ são de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n - \{0\}$ respect.

Muita Muita Muita Atenção

* Se uma norma não provém de um prod. interno, então ela não é necessariamente uma função diferenciável em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, nem $|u|^2$ tem de ser dif.

— Tome p/ exemplo a norma $\|u\|_{sup} = \max\{|x|, |y|\}$ onde $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Esta norma ñ é dif. em nenhum dos ptos $u = (x, x)$.

De fato, tome $u = (x, x)$, $x > 0$. Então

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\|u + t.(x,0)\|_{sup} - \|u\|_{sup}}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{(1+t).x - x}{t} = x$$

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\|u + t.(x,0)\|_{sup} - \|u\|_{sup}}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{x - x}{t} = 0 .$$

Então o limite $\lim_{t \to 0} \frac{\|u + t.h\|_{sup} - \|u\|_{sup}}{t}$ não existe $\therefore$ a função ñ é dif.