Então: $B(x+h, y+k) = B(x,y) + B(x,k) + B(h,y) + B(h,k)$.

Basta provar que: $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{B(h,k)}{|(h,k)|} = 0$.

Usando em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ a norma $|(h,k)| = \max\{|h|,|k|\}$, teremos:

$$\frac{|B(h,k)|}{|(h,k)|} = \frac{|B(h,k)|}{\max\{|h|,|k|\}} \leq \frac{c\cdot|h|\cdot|k|}{\max\{|h|,|k|\}} = c\cdot\min\{|h|,|k|\}.$$

Então $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|B(h,k)|}{|(h,k)|} \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} c\cdot(|h|+|k|) = 0$ ∎

(4) Inversão de matrizes. Primeiramente precisamos verificar o seguinte: o conjunto $GL(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ das transf. lineares inversíveis $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é aberto.

Sabemos que $\det: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Então:

$$\det^{-1}((-\infty,0)\cup(0,+\infty)) = GL(\mathbb{R}^n) \text{ é aberto.}$$

Considere então a aplicação inversão: $f: GL(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, definida por:

$$f(X) = X^{-1}.$$

• Afirmação: f é diferenciável.

prova. Tome $X \in GL(\mathbb{R}^n)$ qualquer. Defina:

$$f'(X): \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \quad H \mapsto -X^{-1}HX^{-1}.$$

Então temos:

$$(X+H)^{-1} = X^{-1} - X^{-1} H X^{-1} + \underbrace{(X^{-1}H)^2 (X+H)^{-1}}_{r(H)}$$

Portanto: $\lim\limits_{H\to 0} \frac{|r(H)|}{|H|} \leq \lim\limits_{H\to 0} \frac{|X^{-1}|^2 . |H|^2 . |X+H|^{-1}}{|H|} = \lim\limits_{H\to 0} (|X^{-1}|^2 |X+H|^{-1})|H|$

$$= 0 .$$

Então de fato f é diferenciável e sua derivada é: $f'(X) . H = - X^{-1} H X^{-1}$.

- Em particular se $n=1$ então $f(x) = \frac{1}{x}$. E aí a derivada é:

$$f'(x).h = -\frac{1}{x} . h . \frac{1}{x} \quad \therefore \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} .$$

5) Coordenadas de uma aplicação diferenciável.

Uma aplicação $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $x \in \mathcal{U}$ se, e somente se, cada função coordenada $f_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de f for diferenciável no ponto x .

Além disso $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ será dada por

$$f'(x).h = (f_1'(x).h , \ldots , f_n'(x).h)$$

As vezes denotaremos $f_i'(x)$ por $Df_i(x)$.

A demonstração deste fato é bem simples. Basta notar que a igualdade

$$f(x+h) = f(x) + T \cdot h + r(h)$$

é equivalente a n-igualdades:

$$f_i(x+h) = f_i(x) + T_i \cdot h + r_i(h), \quad \text{onde } T_i \text{ e } r_i \text{ são as coordenadas}$$

das funções T e r.

Além disso, $\frac{r(h)}{|h|} \to 0 \iff \frac{r_i(h)}{|h|} \to 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n.$

(6) Matriz Jacobiana. Sejam $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $x \in \mathcal{U}$. Seja e_j o j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^m$. Então:

$$f'(x) \cdot e_j = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot e_j) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}^n. \quad (\star)$$

definição: O limite $(\star)$ é usualmente chamado de j-ésima derivada parcial de f no ponto x, e é indicado por

$$\boxed{f'(x) \cdot e_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)}$$

- Pelo exemplo anterior, se $f^1, \dots, f^n : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ são as coordenadas de f, então

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x) \right).$$

- Considere $h \in \mathbb{R}^m$ qualquer. Então

$$h = \sum_{i=1}^{m} h_i \cdot e_i$$

Logo $f'(x) \cdot h = \sum h_i \cdot f'(x) \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x^i}(x) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} h_i \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x^i}(x) \right)$$

Assim $f'(x) \cdot h = Jf(x) \cdot h$ onde $Jf(x)$ é a matriz cujas linhas são $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

$$Jf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_3}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

- A matriz $Jf(x)$ é chamada matriz jacobiana de f no ponto x.

(7) Muito Cuidado Pode acontecer de existir todas as derivadas parciais, ou seja, existir a matriz jacobiana $Jf(x)$ mas mesmo assim f não ser diferenciável no ponto x.

derivada direcional: dada $f: U \to \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^m$ aberto) e $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^m$ o limite:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t.h) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}^n$$

quando existe é conhecido como a derivada direcional de f na direção h.

- Claro que se f é diferenciável então todas as derivadas direcionais existem e são iguais a $f'(x) \cdot h$.

A recíproca é falsa: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \;, \quad f(0,0) = 0 .$$

Se $h = (a,b)$ então: $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} = \frac{a^2 b}{a^2+b^2}$.

Portanto f não pode ser diferenciável na origem pois $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)$ não depende linearmente de h.

(8) Caminhos diferenciáveis.

definição. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e X um espaço qualquer. Uma função $c: I \to X$ é chamada de caminho em X.

• Dado um caminho $f : J \to \mathbb{R}^n$, seu vetor velocidade em um ponto interior $x \in J$ é definido por:

$$v = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}^n .$$

desde que esse limite exista. Escrevemos $\boxed{v = \frac{df}{dt}(x)}$ para indicar o vetor velocidade do caminho f no ponto x.

• Afirmação: Um caminho $f : J \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $x \in J \Leftrightarrow$ existe o vetor velocidade no ponto x.

De fato, seja $f'(x)$ uma aplic. linear: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ então temos

$$f'(x) \cdot t = t \cdot f'(x) . 1$$

Assim: $f(x+t) = f(x) + f'(x) \cdot t + r(t) \Leftrightarrow r(t) = f(x+t) - f(x) - t \cdot f'(x) . 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{r(t)}{t} = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - f'(x) . 1$$

Então $\lim_{t \to 0} \frac{r(t)}{|t|} = 0 \Leftrightarrow f'(x) . 1 = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \Leftrightarrow$ o vetor velocidade existe.

• Se as funções coordenadas de $f : J \to \mathbb{R}^n$ são $f_1, \dots, f_n$, o vetor velocidade $\frac{df}{dt}(x)$ é dado por: $\frac{df}{dt}(x) = \left(\frac{df_1}{dt}(x), \dots, \frac{df_n}{dt}(x) \right)$.

(9) Funções reais : $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função dif. em x. Então sua matriz jacobiana tem apenas uma linha:

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Os números $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ são as coordenadas do funcional linear:

$$df(x) \cdot h = Jf(x) \cdot h \quad , \quad df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

Então podemos escrever :

$$df(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot e_i \quad , \quad \text{onde} \quad e_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto v_i$$

Os funcionais lineares e^i tb são denotados por: dx_i . Então

$$df(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot dx_i$$

Classe de Diferenciabilidade.

1. Derivadas de ordem 2.

Dado $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto, dizemos que uma aplicação $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ é dif. em $\mathcal{U}$ quando ela for diferenciável em todos os pontos de $\mathcal{U}$. Define-se então a <u>aplicação derivada</u>:

$$\begin{aligned} f' : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ x &\longmapsto f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n . \end{aligned}$$

O espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial com norma. Então podemos falar sobre a continuidade de f'.

<u>definição</u>: Dizemos que f é de classe C^1 $(f \in C^1)$, ou que f é continuamente diferenciável, se f for diferenciável e f' for contínua.

- Também podemos nos perguntar sobre a diferenciabilidade de f'.

<u>definição</u>: Se $f' : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tem derivada no ponto $x \in \mathcal{U}$, dizemos que f é duas vezes dif. em x e escrevemos $f''(x) : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ para indicar a derivada de f' no ponto x.

Assim $f''(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m ; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$. Quando f é duas vezes dif em todos os pts dizemos simplesmente que f é duas vezes dif. em $\mathcal{U}$.

Se, além disso, $f'' : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ for contínua então f é dita **duas vezes continuamente diferenciável**, ou de classe C^2, $(f \in C^2)$.

- Vejamos o caso de uma função duas vezes dif. com mais profundidade:

- Sua derivada é uma função $f': \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ dada por:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i \, ,$$

onde $\{dx_1, \dots, dx_m\}$ é a notação para a base canônica de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.

- A matriz Jacobiana de $f': \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ é então a matriz com entradas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) \, .$$

Como transf. linear, a aplicação $f''(x): \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ é caracterizada por:

$$f''(x) \cdot e_i = \frac{\partial f'}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, dx_j \, .$$

- Distinção entre $f''(x)$ e $d^2 f(x)$

Observe que existe um isomorfismo natural $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)) \approx \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ que associa a cada transf. linear $T: \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ a tranf. bilinear

$$\tilde{T}: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \quad \tilde{T}(u, v) = (T.u) \cdot v$$

isso nos permite considerar a derivada segunda como sendo uma aplicação bilinear: $f''(x): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Considere $d^2f(x)$ a aplic. bilinear associada a $f''(x)$ pelo isomorfismo acima. Ou seja,

$$d^2f(x)\cdot(u,v) = (f''(x)\cdot u)\cdot v \ .$$

Então

$$d^2f(x)\cdot(e_i, e_j) = (f''(x)\cdot e_i)\cdot e_j =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x)\, dx_k\right)\cdot e_j$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\cdot dx_j(e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Lembremos agora que o espaço $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ tem uma base natural, que consiste nas formas bilineares

$$dx_i \bullet dx_j : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

definidas por $dx_i \bullet dx_j\,(u,v) = u_i \cdot v_j$, onde $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_m)$.

Portanto:

$$\boxed{d^2f(x)(u,v) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i \cdot dx_j} \ .$$

- Daqui p/ frente não faremos mais distinção entre d^2f e f''.

Derivadas de Ordem Superior

• A definição é indutiva.

Suponhamos que já definimos tudo para $k-1$. Tome $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ e suponha que ela é $(k-1)$-vezes diferenciável.

Então, sua $(k-1)$-ésima derivada é uma aplicação $f^{(k-1)}: \mathcal{U} \to \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{U}$ no espaço das aplicações $(k-1)$-lineares de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$.

• Se $f^{(k-1)}$ for diferenciável em um ponto $x \in \mathcal{U}$, diremos que f é k vezes diferenciável neste ponto e, usando o isomorfismo:

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \longrightarrow \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

$$T: \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \longrightarrow G: \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(u_1, \dots, u_k) \mapsto ((\dots(Tu_1)\cdot u_2 \dots)\cdot u_{k-1})\cdot u_k$$

identificaremos $f^{(k)}(x)$ com uma aplicação k-linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, que chamamos de k-ésima derivada de f no ponto x.

• Quando $f^{(k)}(x)$ existe em cada $x \in \mathcal{U}$ dizemos que $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ é k-vezes diferenciável. Fica então definida:

$$f^{(k)}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

Diremos que $f \in C^k$, k-vezes continuamente dif., quando $f^{(k)}$ for contínua.

Por conveniência C^0 indicará o conj. das funções contínuas.

definição. Diremos que f é infinitamente diferenciável, e denotaremos por $f \in C^\infty$, se:

$$f \in C^k, \ \forall \ 0 \leq k < +\infty .$$

- Claro que: $C^\infty \subset \ldots \subset C^k \subset C^{k-1} \subset \ldots \subset C^2 \subset C^1 \subset C^0$.

Obs. Com as regras elementares de diferenciação cada $C^k(U, \mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial real (de dim. infinita), e que a derivação

$$\begin{aligned} D : \ C^k(U, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow C^{k-1}(U, \mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto Df = f' \end{aligned}$$

é linear.

- Observe que C^∞ é a única classe invariante por Df.