**Teorema.** Seja $f: X \to \mathbb{R}^n$ contínua no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Para todo subconjunto compacto $K \subset X$, sua imagem $f(K)$ é compacta.

**prova:**

Vamos provar primeiro que $f(K)$ é fechado.
Suponha que $y \in \mathbb{R}^n$ é aderente a $f(K)$. Então existe uma sequência

$(x_k) \subset K$ tal que $f(x_k) \longrightarrow y$. Como $K$ é compacto, a sequência $x_k$ possui subseq. convergente: $x_{k_r} \to b \in K$

Então: $f(x_{k_i}) \to f(b)$. Logo $y = f(b)$. Assim $y \in f(K)$ $\therefore$ $f(K)$ é fechado.

Agora como $K$ é limitado, $f(K)$ é limitado. Então $f(K)$ é fechado e limitado ■

**Corolário (Weierstrass)** Toda função real contínua $f: K \to \mathbb{R}$, definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^m$, atinge seu máximo e seu mínimo em $K$, isto é, $\exists\ x_0, x_1 \in K$ tq:

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad , \forall\ x \in K.$$

**prova:** $f(K) \subset \mathbb{R}$ é compacto, logo: $y_0 = \inf f(K)$, $y_1 = \sup f(K) \in f(K)$ ■

**Corolário.** Seja $f: K \to Y$ uma função bijetora contínua, então $f$ é homeomorfismo

prova. Considere $f^{-1}: Y \to K$.
Tome $F \subset K$ um fechado em $K$. É claro que $F$ é limitado $\therefore$ compacto.

Então $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ = compacto em $Y$ = fechado em $Y$.

Logo $f^{-1}$ é contínua $\therefore$ homeomorfismos c.q.d ■

## Norma de uma Transf. Linear.

Fixemos arbitrariamente uma norma em $\mathbb{R}^m$ e outra em $\mathbb{R}^n$.

Definimos uma norma no espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{nm}$, pondo, para cada transformação linear $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$,

$$|A| := \sup\{|A \cdot x| : x \in \mathbb{R}^m, |x| = 1\}.$$

Propriedades. a) $|A \cdot x| \leq |A| \cdot |x|, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^m$

b) $|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$ se $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$.

# Aplicações Diferenciáveis

**definição.** Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto. Dizemos que uma aplicação

$$f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em um ponto $x \in \mathcal{U}$ quando existir uma transformação linear

$$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

tal que

$$f(x+h) = f(x) + T.h + r(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0. \qquad (\star)$$

para todo $h \in \mathbb{R}^m$ suficientemente pequeno de forma que $x+h \in \mathcal{U}$.

- A igualdade $(\star)$ é simplesmente a definição do "resto" $r(h) \in \mathbb{R}^n$.

Às vezes é conveniente escrever a condição da diferenciabilidade de $f$ na forma:

$$f(x+h) = f(x) + T.h + \rho(h).|h| \quad , \text{ onde } \lim_{h\to 0} \rho(h) = 0.$$

Para isto basta tomar $\rho(h) = r(h)/|h|$.

• Se $f: U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $x \in U$ então, para cada vetor $h \in \mathbb{R}^m$ tem-se:

$$T.h = \frac{T.(th)}{t} = \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \pm \frac{r(th)}{|th|}.|h| \quad , \text{ para todo } t \neq 0 \text{ real}$$

Logo:

$$T.h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} .$$

• Então se $T$ existir ela é única. Chamaremos essa $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de derivada de $f$ no ponto $x$, e ela será indicada por $f'(x)$ ou $Df(x)$.

Usando essa notação, a condição p/ diferenciabilidade em um ponto $x \in U$ se escreve:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + r(h) \quad , \quad \lim_{h \to 0} r(h)/|h| = 0 .$$

Afirmação. Se $f$ é diferenciável no ponto $x \in U$ então ela é contínua em $x$.

prova. Lembremos que $f$ é contínua em $x \Leftrightarrow \lim_{y \to x} f(y) = f(x)$.

Observe que: $f(y) = f(x+(y-x))$. Então:

$$f(y) = f(x) + f'(x).(y-x) + r(y-x)$$

Logo $\lim_{y \to x} f(y) = \lim_{y \to x} f(x) + \lim_{y \to x} f'(x).(y-x) + \lim_{y \to x} r(y-x)$

$$= f(x) + 0 + 0 = f(x) \quad ■$$

## Exemplos

(1) Aplic. constantes

Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = a \ \forall x$. Então tome $\begin{array}{l} T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \quad x \mapsto 0 \end{array}$.

Assim: $\underset{a}{\underset{\parallel}{f(x+h)}} = \underset{a}{\underset{\parallel}{f(x)}} + 0.h + 0$ $\quad \therefore f$ é diferenciável.

(2) Transf. lineares

Considere uma transf. linear $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ qualquer. Então defina

$$T'(x) = T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \ \forall x.$$

Assim:

$$T(x+h) = T(x) + T(h) + 0 = T(x) + T'(x) \cdot h + 0 .$$

Logo $T$ é diferenciável e sua derivada em qualquer $x$ é $T'(x) = T$.

(3) Transf. Bilineares.

Uma transf. Bilinear $B: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em cada ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e sua derivada é a transformação linear

$B'(x,y): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ definida por

$$B'(x,y) \cdot (h,k) = B(x,k) + B(h,y).$$

prova. Sabemos que $\exists \ c \in \mathbb{R}$ tal que, $\forall \ h \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{R}^n$ temos

$$|B(h,k)| \leq c \cdot |h| \cdot |k| .$$

Então: $B(x+h, y+k) = B(x,y) + B(x,k) + B(h,y) + B(h,k)$.

Basta provar que: $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{B(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.

Usando em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ a norma $\|(h,k)\| = \max\{|h|,|k|\}$, temos:

$$\frac{|B(h,k)|}{\|(h,k)\|} = \frac{|B(h,k)|}{\max\{|h|,|k|\}} \leq \frac{c \cdot |h| \cdot |k|}{\max\{|h|,|k|\}} = c \cdot \min\{|h|,|k|\}.$$

Então $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{|B(h,k)|}{\|(h,k)\|} \leq \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} c \cdot (|h| + |k|) = 0$ ■