Teorema (Muito Importante)

Seja $f: X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. A fim de que f seja contínua, é necessário e suficiente que:

$f^{-1}(A) \subset X$ é um aberto em X para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

prova:

(necessário) Suponha q f é contínua. Tome $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dado

$x \in f^{-1}(A)$ qualquer, $f(x) \in A$. Então $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que: $B(f(x), \varepsilon) \subset A$.

Como f é contínua: $\exists\ \delta > 0$ tal que: $y \in X$, $\|y - x\| < \delta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$.

Logo $B(x, \delta) \cap X \subset f^{-1}(A)$. Da arbitrariedade de $x \in f^{-1}(A)$ segue que $f^{-1}(A)$ é aberto.

(suficiente). Tome $a \in X$ qualquer. Então dado $\varepsilon > 0$ qualquer, o cjto

$f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ é aberto em X, portanto para a, $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$B(a, \delta) \cap X \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$$

isto é, se $x \in X$ e $\|x - a\| < \delta$ então $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Logo f é cont. em todo $a \in X$ $\therefore$ contínua ∎

Corolário

(1) Se $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ são abertos então $A \times B \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é aberto.

(2) Se $A \subset \mathbb{R}^m$ é aberto então $\pi_i(A)$ é aberto onde $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a proj. na i-ésima coordenada.

prova.

(1) Observe que:

$$A \times B = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B)$$

π_1 e π_2 são contínuas $\therefore$ $A \times B$ é aberto.

(2) Na norma do sup temos $B(a, \delta) = \prod_{j=1}^{m} (a_j - \delta, a_j + \delta)$.

Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Tome $a_i = \pi_i(a) \in \pi_i(A)$. Então, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$B := \prod_{j=1}^{m} (a_j - \delta; a_j + \delta) \subset A \therefore \pi_i(B) \subset \pi_i(A)$$

Mas $\pi_i(B) = (a_i - \delta, a_i + \delta)$. Logo a_i é pto interior de $\pi_i(A)$ ∎

Conjuntos Fechados

def. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ diz-se aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando é limite de uma sequência de pontos desse conjunto. Ou seja, $\exists\ (x_k) \subset X$ tal que $x_k \to a$.

IMPORTANTE: Observe que há uma pequena diferença entre pontos aderentes e ptos de acumulação.

- $a \in \mathbb{R}^n$ é pto de acumulação de $X \Leftrightarrow \exists$ sequência $(x_k) \subset \underline{X - \{a\}}$ tal que $x_k \to a$.

aqui está a diferença

- Todo ponto $a \in X$ é aderente pois podemos tomar a sequência $x_k = a, \forall k$. Então $(x_k) \subset X$ e $x_k \to a$.

- Se $a \in \mathbb{R}^n$ for aderente a X mas $a \notin X$ então a é pto de acumulação de X.

definição. O conjunto dos pontos aderentes a X chama-se o fecho de X e é indicado por:

$$\overline{X}$$

Lema. $a \in \overline{X} \Leftrightarrow$ todo aberto que contém a intersecta X

prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que $a \in \overline{X}$ e que $a \in A$ onde A é um aberto em $\mathbb{R}^n$.

Como $a \in \overline{X}$, $\exists$ seq. $(x_k) \subset X$ tal que $x_k \to a$.

Como $a \in A$ e A é aberto, $\exists\ r > 0$ tq $B(a,r) \subset A$.

Como $x_k \to a$, $\exists\ k_0 \in \mathbb{N}$ tq $k \geq k_0 \Rightarrow x_k \in B(a,r)$. Logo, $A \cap X \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Se todo aberto que contém a intersecta o cjto X então em particular, p/ cada $k \in \mathbb{N}$ podemos escolher um ponto:

$$x_k \in X \cap B(a, 1/k).$$

Então $(x_k) \subset X$ e $x_k \to a$ $\therefore$ $a \in \overline{X}$ ∎

Exemplo. $\overline{B(a,b)} = B[a,b] = \overline{B[a,b]}$.

definição. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se fechado quando $X = \overline{X}$.

Portanto, dizer que X é fechado é o mesmo que dizer que: se $\lim x_k = a$ e $x_k \in X$, $\forall k$, então $a \in X$.

- A bola fechada é fechado. Como consequência: fecho de cjtos limitados é limitado.

Teorema. Um conjunto X é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto.

prova.

($\Rightarrow$) Suponha que $X = \overline{X}$. Tome $a \in \mathbb{R}^n - X$. Então $a \notin \overline{X}$ $\therefore$ existe aberto $A \ni a$ tal que: $A \cap X = \emptyset$.
Tome $\delta > 0$ tal que: $B(a,\delta) \subset A$. Então $B(a,\delta) \cap X = \emptyset$ $\therefore$ $B(a,\delta) \subset \mathbb{R}^n - X$.
Então $\mathbb{R}^n - X$ é aberto.

($\Leftarrow$) Suponha que $\mathbb{R}^n - X$ é aberto. Tome $a \in \overline{X}$. Então $\forall\, \delta > 0$ temos

$$B(a,\delta) \cap X \neq \emptyset$$

$\therefore$ $B(a,\delta) \not\subset \mathbb{R}^n - X$ $\forall\, \delta > 0$ $\Rightarrow$ $a \notin \mathbb{R}^n - X$ $\therefore$ $a \in X$ $\therefore$ $X = \overline{X}$ ■

Corolário. O fecho de todo cjto é fechado.
prova: Tome $X \subset \mathbb{R}^n$ qualquer.
Se $a \in \mathbb{R}^n - \overline{X}$ então, $\exists\, \delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \cap X = \emptyset$. Logo $\mathbb{R}^n - \overline{X}$ é aberto. Então $\overline{X}$ é fechado.

Ou seja,

$$\overline{\overline{X}} = \overline{X}. \quad ■$$

Teorema. Os conjuntos fechados do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ gozam das seguintes propriedades:
(1) $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ são fechados;

(2) A reunião $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$ de um número finito de conjuntos fechados $F_1, \ldots, F_k$ é um cjto fechado;

(3) A interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F$ de uma família qq $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos fechados F_λ é um conjunto fechado.

prova

(1) $\mathbb{R}^n - \phi = \mathbb{R}^n$ é aberto $\therefore$ ϕ é fechado

$\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^n = \phi$ é ab $\therefore$ $\mathbb{R}^n$ é fechado.

(2) Se $F_1, \dots, F_k$ são fechados então $F_1^c, \dots, F_k^c$ são abertos. Logo:

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right)^c \text{ é aberto } \therefore \bigcap F_i \text{ é fechado.}$$

(3) Cada F_λ^c é aberto. Então $\bigcup_{\lambda \in L} F_\lambda^c$ é aberto. Mas

$$\bigcup_{\lambda \in L} F_\lambda^c = \left(\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda\right)^c \quad \therefore \quad \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \text{ é fechado} \quad \blacksquare$$

• Observe que, pela definição de fronteira de um conjunto, um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ pertence a ∂X se, e somente se a é aderente a X e a $\mathbb{R}^n - X$.

Ou seja, $\partial X = \overline{X} \cap \overline{(\mathbb{R} - X)}$.

Em particular ∂X é um conjunto fechado.

definição: Fixemos um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Um subconjto $F \subset X$ diz-se fechado em X quando existe um conjunto $G \subset \mathbb{R}^n$ fechado tal que

$$F = X \cap G .$$

Observe que pela definição, F é fechado em X se, e somente se, F contém todos os seus ptos de aderência que estão em X.

De fato, se $F \subset X$ contém todos os seus pontos de aderência que estão no X então $F \supset X \cap \overline{F}$. Mas $F \subset \overline{F} \cap X$ $\therefore$ $F = X \cap \overline{F} \Rightarrow F$ fech em X.

E, se F é fechado em X então $F = X \cap G$ com G fech. em $\mathbb{R}^n$. Se $x \in \overline{F}$ e $x \in X$ então como $F \subset G$ temos $x \in G$ $\therefore$ $x \in X \cap G = F$.

Exemplo. Seja $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$. O intervalo $A = (0, 1]$ é fechado em X pois: $A = [0, 1] \cap X$.

Exercício. Seja $F \subset X$. A fim de que F seja fechado em X é necessário e suficiente que o conjunto $A = X - F$ seja aberto em X.

prova

Dados $F' \subset \mathbb{R}^n$ e $A' = \mathbb{R}^n - F'$. Temos:

$$F = X \cap F' \Longleftrightarrow X - F = X \cap A'.$$

Então F é fechado em $X \Leftrightarrow X - F$ é aberto em X ∎

Teorema. Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no subconjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. A fim de que f seja contínua, é necessário e suficiente que $f^{-1}(F)$ seja um conjunto fechado em X, para todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$.

prova:

$(\Rightarrow)$ Tome $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Então $\mathbb{R}^n - F$ é ab $\therefore$ $f^{-1}(\mathbb{R}^n - F) = X - f^{-1}(F)$ é ab $\therefore$ $f^{-1}(F)$ é fechado.

($\Leftarrow$) Dado qq aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, $F := \mathbb{R}^n - A$ é fech $\therefore$ $f^{-1}(F) = X - f^{-1}(A)$ é fech. em X $\therefore$ $f^{-1}(A)$ é aberto em X ■

Exemplo. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínuas. O conjunto:

$$\{x : f(x) \le a, g(x) \le b\} = f^{-1}((-\infty, a]) \cap g^{-1}((-\infty, b])$$

é fechado.

Teorema. Se $F \subset \mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^n$ são subcjtos fechados então o produto cartesiano $F \times G \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é fechado.

prova. π_1 e π_2 são contínuas $\therefore$ $F \times G = \pi_1^{-1}(F) \cap \pi_2^{-1}(G)$ é fechado ■

definição. Sejam $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que Y é denso em X quando

$$\overline{Y} \cap X = X.$$

Ou seja, todo ponto de X é limite de uma sequência de pontos de Y.

Teorema. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ aplic. contínuas num conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset X$ um subcjto denso. Se $f(y) = g(y)$ $\forall$ $y \in Y$ então $f = g$.

prova. Dado $x \in X$ qq. Tome $(y_k) \subset Y$ tal que $y_k \to x$. Então:

$$f(y_k) = g(y_k) \ \forall k \quad \text{e} \quad f(x) = \lim f(y_k) = \lim g(y_k) = g(x) \ ■$$

Obs. $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Então $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ é denso.

Conjuntos Compactos

definição. Um cjto $K \subset \mathbb{R}^n$ é dito compacto se ele for fechado e limitado.

Consequência de Bolzano-Weierstrass: Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, toda seq. de ptos $x_k \in K$ possui uma subseq. que converge para um ponto de K.

Conseq. imediatas da definição:

(1) $K_1, \ldots, K_p$ compactos $\Rightarrow$ $K_1 \cup \ldots \cup K_p$ compactos.
(2) Interseção de qq família de cptos é compacto.

(3) $K \subset \mathbb{R}^m$, $L \subset \mathbb{R}^n$ compactos $\Rightarrow$ $K \times L$ é compacto.

Propriedade de Cantor: Dada uma sequência decrescente $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_k \supset \ldots$ de conjuntos compactos não vazios, a interseção

$$K = \bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \quad \text{é não vazio.}$$

prova. Para cada $k \in \mathbb{N}$, escolha $x_k \in K_k$. Então temos uma sequência (x_k). Esta seq é limitada $\therefore$ tem subseq (x_{k_i}) convergindo para um ponto x. Logo, como, $\forall i$, $x_{k_j} \in K_i$ a partir de um certo j, então $x \in K_j$ $\forall j$. Logo $x \in K$ ∎

Teorema. Seja $f: X \to \mathbb{R}^n$ contínua no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Para todo subconjunto compacto $K \subset X$, sua imagem $f(K)$ é compacta.

prova:

Vamos provar primeiro que $f(K)$ é fechado.
Suponha que $y \in \mathbb{R}^n$ é aderente a $f(K)$. Então existe uma sequência

$(x_k) \subset K$ tal que $f(x_k) \to y$. Como K é compacto, a sequência x_k possui subseq. convergente: $x_{k_i} \to b \in K$

Então: $f(x_{k_i}) \to f(b)$. Logo $y = f(b)$. Assim $y \in f(K) \therefore f(K)$ é fechado.

Agora como K é limitado, $f(K)$ é limitado. Então $f(K)$ é fechado e limitado ■

Corolário (Weierstrass) Toda função real contínua $f: K \to \mathbb{R}$, definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^m$, atinge seu máximo e seu mínimo em K, isto é, $\exists\ x_0, x_1 \in K$ tq:

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad , \forall\ x \in K.$$

prova: $f(K) \subset \mathbb{R}$ é compacto, logo: $y_0 = \inf f(K)$, $y_1 = \sup f(K) \in f(K)$ ■

Corolário. Seja $f: K \to Y$ uma função bijetora contínua, então f é homeomorfismo prova. Considere $f^{-1}: Y \to K$.

Tome $F \subset K$ um fechado em K. É claro que F é limitado $\therefore$ compacto.

Então $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ = compacto em Y = fechado em Y.

Logo f^{-1} é contínua $\therefore$ homeomorfismos c.q.d ■