Proposição. Toda aplicação Lipschitziana é contínua, em particular toda aplicação linear é contínua.

prova. Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ Lipschitziana e $C > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \cdot \|x - y\| \quad , \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$ qualquer tome $\delta = \frac{\varepsilon}{2C}$. Então,

$$\|x - y\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2C} \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq C \cdot \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Logo f é contínua em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^n$ ∎

Aula 4

Teorema. Toda aplicação multi-linear $\varphi : \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{m_n} \to \mathbb{R}^p$ é contínua.

prova. Faremos apenas o caso bilinear, o caso geral é análogo.

Considere $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ bilinear. Considere no espaço $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ a norma da soma $|\cdot|$. Denote

$$c = \max_{i,j} |\varphi(e_i, e_j)| .$$

Para quaisquer $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ temos : $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot e_j$.

Então $|x| \cdot |y| = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|\right) = \sum_{i,j} |x_i| \cdot |y_j|$.

• $\varphi(x,y) = \sum_{i,j} x_i x_j \; \varphi(e_i, e_j)$.

Logo temos:

$$|\varphi(x,y)| \leq \sum |x_i|\cdot|y_j|\cdot|\varphi(e_i,e_j)| \leq c\cdot \sum |x_i||y_j| = c\cdot|x|\cdot|y|.$$

Então, dados $z=(x,y)$ e $z'=(x',y')$ em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ temos:

$$|\varphi(z)-\varphi(z')| = |\varphi(x, y-y') + \varphi(x-x', y')| \leq |\varphi(x, y-y')| + |\varphi(x-x', y')|$$
$$\leq c\cdot(|x|\cdot|y-y'| + |y'|\cdot|x-x'|).$$

Se $z, z' \in B[0,r]$ em $\mathbb{R}^{m+n}$ temos: $\|x\| \leq r$, $\|y'\| \leq r$. Assim

$$|\varphi(z)-\varphi(z')| \leq c\cdot r\cdot(|x-x'| + |y-y'|) = c\cdot r\cdot|z-z'|.$$

Logo φ é contínua ∎

Corolário. As seguintes aplicações são contínuas.

(1) multiplicação de nº's reais: $\varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a,b) \longmapsto a\cdot b$

(2) multiplicação de escalar por vetor: $\varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(\alpha, v) \longmapsto \alpha\cdot v$

(3) produto interno: $\langle\cdot,\cdot\rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$

(4) multiplicação de matrizes: $\varphi: \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^{np} \longrightarrow \mathbb{R}^{mp}$, $(X, Y) \longmapsto X\cdot Y$

(5) Função avaliação: $\varphi: \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(A,x) := A(x)$.

(6) Determinante: $\det: \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\det: \overbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}^{n \text{ vezes}} \to \mathbb{R}$)

Teorema. A composta de duas aplicações contínuas é contínua.

prova. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists$ $\eta > 0$ tq

$$y \in Y \text{ e } |y - f(a)| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

$\exists$ $\delta > 0$ tq $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$.

$\therefore$ $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ ■

definição: Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f: X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação. As funções $f_i: X \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_i = \pi_i \circ f \quad , \; 1 \leq i \leq n$$

são chamadas as coordenadas da função f. Assim temos

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

Para indicar que os f_i's são as funções coordenadas de f, escreve-se:

$$f = (f_1, \ldots, f_n).$$

Teorema. Uma aplicação $f: X \to \mathbb{R}^n$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, é cont. num ponto $a \in X$ se, e somente se, cada uma das suas funções coord é contínua.

prova. Como as projeções são contínuas então: f cont $\Rightarrow \pi_i \circ f = f_i$ cont.
Suponha que f_i é cont. $\forall$ $1 \leq i \leq n$, no ponto $a \in X$.

Então, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0, \ldots, \delta_n > 0$ tais que $|x-a| < \delta_i$ implica

$|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$. Tomemos em $\mathbb{R}^n$ a norma do sup e tome $\delta_0 = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \delta_i$.
Então $|x-a| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f(a)| < \varepsilon \; \forall i \Rightarrow |f(x) - f(a)| = \max\limits_i \{|f_i(x) - f_i(a)|\} < \varepsilon$ ■

Cor.: $f: X \to \mathbb{R}^m$, $g: X \to \mathbb{R}^n$. Seja $(f,g): X \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ definida por $(f,g)(x) = (f(x), g(x))$. Então:

$$(f,g) \text{ é contínua} \Leftrightarrow f \text{ e } g \text{ são contínuas.}$$

Aplicações

• Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f, g: X \to \mathbb{R}^n$, $\alpha: X \to \mathbb{R}$ aplicações contínuas. Então são também contínuas as aplicações:

$$f+g: X \to \mathbb{R}^n, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\alpha . f: X \to \mathbb{R}^n, \quad (\alpha . f)(x) = \alpha(x) . f(x).$$

$$\langle f, g \rangle : X \to \mathbb{R}, \quad \langle f, g\rangle(x) = \langle f(x), g(x)\rangle \;;$$

$$\frac{1}{\alpha}: X \to \mathbb{R}, \quad \left(\frac{1}{\alpha}\right)(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \text{ definida se } 0 \notin \alpha(X).$$

prova:

Tome

$$s: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(x, y) \to x + y \qquad (t, x) \to t.x$$

$$\xi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \rho: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to \langle x, y\rangle \qquad \rho(t) = 1/t \,.$$

Já sabemos que todas elas são contínuas (s é Lipschitziana, φ e ξ são bilineares e ρ já sabíamos do cálculo).

Então temos:

$$f+g = s \circ (f,g) \qquad \langle f,g \rangle = \xi \circ (f \circ g)$$

$$\alpha \cdot f = \varphi \circ (\alpha, f) \qquad \frac{1}{\alpha} = p \circ \alpha \,. \blacksquare$$

Exemplo. Provar que $f(x,y) = (\operatorname{sen} x) \cdot e^{x^2+y^3}$.

Teorema. Uma aplicação $f: X \to \mathbb{R}^n$ é contínua num ponto $a \in X$ se, e somente se, toda seq. $(x_k) \subset X$ com $\lim x_k = a$ satisfaz

$$\lim f(x_k) = f(a)$$

prova. A ida já fizemos.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $\forall\, (x_k)$ com $\lim x_k = a$ temos $\lim f(x_k) = f(a)$.

Suponha que f não é contínua em a. Então $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_k \in X$ para o qual:

$$|x_k - a| < \frac{1}{k} \quad \text{mas} \quad |f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon \,.$$

Então $\lim x_k = a$ mas $\lim f(x_k) \neq f(a)$ absurdo.

Logo f é cont. em a $\blacksquare$

Homeomorfismos

definição. Dados dois conjuntos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, um homeomorfismo entre X e Y é uma bijeção contínua $f: X \to Y$, cuja inversa $f^{-1}: Y \to X$ também é contínua.

Proposição: Toda aplicação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertível é homeomorfismo.

prova: A^{-1} é linear $\therefore$ contínua ∎

Exercício. Se f e g são homeomorfismos então $f \circ g$ é homeomorfismo.

Exemplos

(a) $T_a: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é homeo pois $T_a(x) = x + a \Rightarrow T^{-1}(x) = T_{-a}(x)$.

(b) homotetias: $H_\lambda: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $H_\lambda(x) = \lambda \cdot x$, com $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

$$(H_\lambda)^{-1} = H_{\lambda^{-1}} .$$

c) Duas bolas abertas quaisquer são homeomorfas: Dadas $B(a,r)$ e $B(0,1)$ basta tomar:

$$\varphi = H_{1/r} \circ T_{-a} .$$

Limites.

Sejam $f: X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida num cjto $X \subset \mathbb{R}^m$ e $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação de X.

definição. Dizemos que $b \in \mathbb{R}^n$ é o limite de $f(x)$ quando $x \to a$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

quando: dado qq $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

• Quando existe o limite é único.

• A continuidade se exprime tb por meio de limites: se o ponto $a \in X$ é isolado então toda $f: X \to \mathbb{R}^n$ é cont. em a; se $a \in X'$ então f é contínua em a se, e somente se,

$$\lim_{x \to a} f(x_k) = f(a).$$

Formulação em termos de sequências: Para que $b = \lim_{x \to a} f(x)$ é necessário e suficiente que $\lim f(x_k) = b$ para toda sequência $x_k \to a$, $x_k \neq a$.

(2) Para que exista $\lim_{x \to a} f(x)$ é suficiente que exista $\lim f(x_k)$ seja qual for a seq. de pontos $x_k \in X - \{a\}$ com $\lim x_k = a$.

Teorema. Seja a um pto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}^m$. Dada a aplicação $f: X \to \mathbb{R}^n$, cujas f.ç.s coordenadas são $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n : X \to \mathbb{R}$, tem-se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b = (b_1, \dots, b_n)$$

se, e somente se, $\lim_{x \to a} f_i(x) = b_i$, $1 \leq i \leq n$.

Relação entre limites e operações

Teorema. Dadas as seq. convergentes de termos $x_k, y_k \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}$, sejam $\lim x_k = a$, $\lim y_k = b$ e $\lim \alpha_k = \alpha$. Então

(1) $\lim (x_k + y_k) = a + b$

(2) $\lim \alpha_k \cdot x_k = \alpha \cdot a$.

(3) $\lim \langle x_k, y_k \rangle = \langle a, b \rangle$ (Prod. int. usual)

(4) $\lim \|x_k\| = \|a\|$. (Qq norma)

prova .

(1), (2), (3) - Basta olhar para as seq. coordenadas.

(4). $\big| \|x_k\| - \|a\| \big| \leq \|x_k - a\| \longrightarrow 0 \therefore \|x_k\| \to \|a\|$ ∎

Teorema . $X \subset \mathbb{R}^m$, $a \in X'$, $b, c \in \mathbb{R}^n$, $f, g: X \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha: X \to \mathbb{R}$ tq

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \lim_{x \to a} g(x) = c, \quad \lim_{x \to a} \alpha(x) = \alpha_0 .$$

Então

(1) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c$.

(2) $\lim_{x \to a} \alpha(x) \cdot f(x) = \alpha_0 \cdot b$.

(3) $\lim_{x \to a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle$.

(4) Seja $\varphi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ bilinear. Dadas agora $f: X \to \mathbb{R}^m$, $g: X \to \mathbb{R}^n$, com $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e g limitada então

$$\lim_{x \to a} \varphi(f(x), g(x)) = 0 .$$

prova : (1), (2), (3) — coordenadas

(4) $|\varphi(f(x), g(x))| \leq M \cdot |f(x)| \cdot |g(x)| \to 0$ ∎