Vamos generalizar esse Teorema para funções reais de várias variáveis.

Notação: $[a,b] := \{ a + t.(b-a) : 0 \leq t \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^m$.

- Considere $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diferenciável em um aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Suponha que o segmento $[a, a+h] \subset \mathcal{U}$. Então $\exists\ 0 < t_0 < 1$ tal que:

$$f(a+h) - f(a) = h.\ f'(a + t_0.h) \cdot h.$$

prova.

Considere $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(t) = f(a+th)$. Pelo teorema do valor médio, $\exists\ t_0 \in (0,1)$ tal que:

$$\phi'(t_0) = \phi(1) - \phi(0)$$

$$\therefore\quad f'(a+t.h) \cdot h = f(a+1.h) - f(a+0.h) = f(a+h) - f(a) \quad \blacksquare$$

* Para funções $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, com $n > 1$, não existe uma igualdade do valor médio.

Exemplo. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = e^{it} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Então $f'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t) \neq (0,0)\ \forall\ t \in \mathbb{R}$.

Observe que $|f'(t)| = 1$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$ mas $f(2\pi) = f(0) = (1, 0)$ $\therefore$

$$f(2\pi) - f(0) = 0 \neq 2\pi . f'(t), \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Teorema (Desigualdade do Valor Médio)

Seja $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ contínua no conjunto aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Se o segmento $[a, a+h] \subset \mathcal{U}$ e f é dif. em todo o $(a, a+h)$ então

$$|f(a+h) - f(a)| \leq |h| \cdot \sup_{0<t<1} |f'(a+t \cdot h)|.$$

demonstração:

Suponha que f é diferenciável em $\underline{a}$.

Defina $\phi : [0.1] \to \mathbb{R}^n$ por $\phi(t) = f(a+th) \in \mathbb{R}^n$.

Então ϕ é cont. em $[0,1]$ e dif. em $[0,1)$. Como $\phi(0) = f(a)$, $\phi(1) = f(a+h)$, $\phi'(t) = f'(a+th) \cdot h$, basta provar que:

$$|\phi(1) - \phi(0)| \leq M$$

onde $M = \sup_{0 \leq t < 1} |\phi'(t)|$.

- defina, para cada $\varepsilon > 0$ o conjunto:

$$X_\varepsilon := \{ t \in [0,1] \; : \; |\phi(s) - \phi(0)| \leq (M+\varepsilon) \cdot s \, , \; \forall \; s \in [0,t] \}.$$

De fato X_ε é um intervalo fechado da forma $[0, \alpha]$.

Vamos provar que $\alpha = 1$. Suponha por absurdo que $\alpha < 1$. Então:

$\exists\, \delta > 0$ tq $\alpha + \delta < 1$ e tq

$$0 \leq h < \delta \Rightarrow \phi(\alpha+h) = \phi(\alpha) + \phi'(\alpha).h + r(h), \text{ com } |r(h)| \leq \varepsilon |h|.$$

Então $|\phi(\alpha+h) - \phi(\alpha)| = |\phi'(\alpha).h + r(h)| \leq (M+\varepsilon).h$ se $0 \leq h < \delta$.

Então, como $\alpha \in X_\varepsilon$ tb temos: $|\phi(\alpha) - \phi(0)| \leq (M+\varepsilon)\alpha$ $\therefore$

$$|\phi(\alpha+h) - \phi(0)| \leq (M+\varepsilon).(h+\alpha) \therefore h+\alpha \in X_\varepsilon, \text{ absurdo!}$$

O mesmo argumento funciona se f é dif. em um segmento $[a,b]$.

Então, se a desigualdade vale para um segmento $[a,b]$ e $[b,c]$ então vale p/ $[a,c]$ ■

Corolário 1: Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ um cjto aberto conexo e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação dif. tal que $f'(x) = 0\ \forall\, x \in \mathcal{U}$ então f é constante em $\mathcal{U}$.

Obs. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ é dito conexo se, $\forall\, A \subset X$ temos:

$$\text{se } A \text{ é fechado e aberto em } X \text{ então } A = \emptyset \text{ ou } A = X$$

prova (Cor): Fixe um ponto $a \in \mathcal{U}$ qualquer. Defina

$$X := \{x \in \mathcal{U} : f(x) = f(a)\} = f^{-1}(\{f(a)\}) \quad \therefore X \text{ é fechado.}$$

Vamos provar que $\mathcal{U}$ é aberto.

Dado $x \in X$, $f(x) = f(a)$, como $\mathcal{U}$ é aberto $\exists\, \delta > 0$ tal que:

$$|h| < \delta \Rightarrow [x, x+h] \subset \mathcal{U}.$$

Então:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \sup |f'(c)| \cdot h = 0 \quad \therefore \quad x+h \in X$$

Ou seja, $|h| < \delta \Rightarrow x+h \in X \therefore X$ é aberto.

Concluímos então que $X = \emptyset$ ou $\mathcal{U}$. Como $a \in X$ temos $X = \mathcal{U}$ ∎

- Forma mais aguçada.

Corolário. Seja $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ cont. em um cjto aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Se o seg. de reta fechado $[a, a+h]$ está contido em $\mathcal{U}$ e f é diferenciável em todos os ptos de $(a, a+h)$, então, para cada transformação linear:

$$T: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

vale:

$$|f(a+h) - f(a) - T \cdot h| \leq \sup_{0<t<1} |f'(a+th) - T| \cdot |h|.$$

prova. Consideremos a aplicação $g: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, definida por:

$$g(x) = f(x) - T \cdot x.$$

Aplicando a D.V.M para g temos:

$$|g(x+h)-g(x)| \leq \sup_{0<t<1} |g'(x+th)| \cdot |h|$$

$$\Rightarrow |f(x+h)-T(x+h)-f(x)+Tx| \leq \sup_{0<t<1} |f'(x+th)-T| \cdot |h| \quad \blacksquare$$

• Caso especial: $T=f'(a)$. Este caso nos dá uma estimativa do resto:

$$|f(a+h)-f(a)-f'(a)\cdot h| \leq \sup_{0<t<1} |f'(a+th)-f'(a)| \cdot |h|$$

definição. Uma aplicação $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ diz-se uniformemente dif. em um subconjunto $X \subset \mathcal{U}$ quando, para todo $\varepsilon>0$, pode ser encontrado $\delta>0$ tal que:

$$|r(x,h)| = |f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot h| < \varepsilon \cdot |h|$$

quaisquer q. sejam $x \in X$ e $|h|<\delta$ com $x+h \in \mathcal{U}$.

Corolário 3. Seja $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Então f é unif. diferenciável em cada subcjto compacto $K \subset \mathcal{U}$.

Corolário 4. Seja $c \in \mathcal{U}$ e suponha que $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ seja contínua, diferenciável em $\mathcal{U}-\{c\}$.
Se existe o limite $\lim_{x\to c} f'(x) = T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ então f é dif em c e

$$f'(c)=T.$$

prova. Seja $\delta > 0$ tal que $c + h \in U$ se $|h| < \delta$. Então pelo cor. 2 temos:

$$\frac{|r(c,h)|}{|h|} = \frac{|f(x+h) - f(x) - T.h|}{|h|} \leq \sup_{0<t<1} |f'(c+th) - T|.$$

Portanto $\lim_{h \to 0} \frac{|r(c,h)|}{|h|} = 0 \Rightarrow f$ é dif em c, com $f'(c) = T$. ■

Exemplo: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dif. por $f(x) = \exp(-1/x^2)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$

Esta é uma função de classe C^∞.

De fato, se $x \neq 0$, $f'(x) = 2x^{-3} e^{-1/x^2}$ e $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$.

Pelo cor 4, $f'(0)$ existe e é igual a zero.

Analogamente, p/ cada $k = 2, 3, \ldots$, a k-ésima derivada de f é da forma

$$f^{(k)}(x) = P(1/x) \cdot \exp(-1/x^2),$$

se $x \neq 0$, onde $P(1/x)$ é um polinômio em x^{-1}. Segue-se que:

$$\lim_{x \to 0} f^{(k)}(x) = 0.$$

Logo, todas as derivadas existem e são iguais a zero.