Então temos:

$$(g\circ f)(x+h) = g(f(x)) + g'(f(x))\cdot[f'(x)\cdot h + \rho(h)\cdot|h|) + \sigma(k)\cdot|k|$$

Chame:

$$\tau(h) := g'(y)\cdot\rho(h) + \sigma(k)\cdot\left|f'(x)\cdot\frac{h}{|h|} + \rho(h)\right| .$$

Assim: $(g\circ f)(x+h) = (g\circ f)(x) + [g'(y)\circ f'(x)]\cdot h + \tau(h)\cdot|h|$.

Basta provar que $\lim_{h\to 0}\tau(h) = 0$. Para isto veja que: $\lim_{h\to 0} g'(y)\cdot\rho(h) = 0$

e $\lim_{h\to 0}\sigma(k) = 0$ enquanto $f'(x)\cdot\frac{h}{|h|}$ é limitada ∎

Corolário. Se $f: U\to\mathbb{R}^n$ e $g: V\to\mathbb{R}^p$ são ambas de classe C^k e $f(U)\subset V$ então $g\circ f: U\to\mathbb{R}^p$ é também de classe C^k.

prova. Seja $\mu: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^p)$ a composição (multiplicação) de transf. lineares. Já vimos que μ é bilinear $\therefore C^\infty$.

Agora observe que:

$$(g\circ f)'(x) = \mu(g'\circ f, f')(x).$$

Suponhamos que o corolário está provado para $k-1$. Então, dadas $f, g\in C^k$, temos $g'\circ f$, $f'\in C^{k-1}$. Portanto $(g\circ f)' = \mu(g'\circ f, f')$ é C^{k-1}.

Ou seja $(g\circ f)$ é C^k ∎

Aplicação

- **Inversão de transformação linear é C^∞:**

Seja $f: GL(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ a inversão: $f(X) = X^{-1}$.

Por simplicidade, escrevamos $E = \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^m); \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$ e consideremos a aplicação linear

$$\begin{aligned} g: \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) &\longrightarrow E \\ (Y \;,\; Z) &\longrightarrow g(Y,Z)\cdot H = Y.H.Z. \end{aligned}$$

Sabemos que f é diferenciável e sua derivada é dada por:

$$f' = -g \circ (f, f) : GL(\mathbb{R}^m) \longrightarrow E$$

onde $(f,f)(X) = (f(X), f(X)) = (X^{-1}, X^{-1})$.

Como g é C^∞ então $f' = -g\circ(f,f) \Rightarrow f'$ é diferenciável $\therefore f \in C^1$.

Continuando, concluimos que $f \in C^\infty$.

Cor 2. Seja $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ dif. em $x_0 \in \mathcal{U}$. Dado $v \in \mathbb{R}^m$, seja $x: t \mapsto x(t)$ um caminho em $\mathcal{U}$, dif. em $t=0$, com $x(0) = x_0$

$x'(0) = v$.

Então $f'(x_0).v$ é o vetor velocidade do caminho $f\circ x$ em $t=0$.

prova. De fato, o vet. velo. de $f \circ x$ em $t=0$ é:

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x(0+k)) - f(x(0))}{k} = (f\circ x)'(0)$$

$$= f'(x(0)) \cdot x'(0) = f'(x_0) \cdot v \quad \blacksquare$$

Corolário. Seja $f: U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ e suponha que f admite uma inversa $g = f^{-1}: V \to \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ ($f(U) = V$, $g(V) = U$), a qual é diferenciável no ponto $y = f(x)$. Então $f'(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo cujo inverso é

$$g'(y): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Em particular, $m = n$.

prova. Temos que provar que $f'(x)$ é bijetora. É suficiente provar que:

$$f'(x) \circ g'(y) = id \quad , \quad g'(y) \circ f'(x) = id.$$

De fato:

$$(f\circ g)' = (id_V)' = id_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow f'(x) \circ g'(y) = id.$$

$$(g \circ f)' = (id_U)' = id_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow g'(y) \circ f'(x) = id \quad \blacksquare$$

Corolário. (Antiga regra da cadeia)
Suponha que $f=(f_1,\dots,f_n)$ e $g=(g_1,\dots,g_p)$. Então, para cada $i=1,\dots,p$ e $j=1,\dots,m$ temos:

$$\frac{\partial(g_i\circ f)}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y^k}(f(x)) \, \frac{\partial f_k}{\partial x^j}(x).$$

prova. $f'(x)\cdot h = Jf(x)\cdot h$, $g'(y)\cdot h = Jg(y)\cdot h$

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\circ f'(x) = Jg(f(x))\cdot Jf(x)$$

Então:

$$\frac{\partial(g_i\circ f)}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i(f(x))}{\partial x^k}\cdot \frac{\partial f_k}{\partial x^j}(x) \quad \blacksquare$$

Obs. Se $U\subset\mathbb{R}^m$ e $f:U\to\mathbb{R}^m$ é dif. no ponto $x\in U$, então sua derivada

$f'(x):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ $\therefore$ faz sentido falar no seu determinante.

- Este determinante, $\det(f'(x))$, é chamado de determinante jacobiano de f em x.

Exemplo. (Função C^∞ sem inversa diferenciável)

Tome $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=t^3$. Já sabemos que é C^∞ e que $f'(x)=\frac{1}{3}t^2$.

A inversa $g(s)=\sqrt[3]{s}$ não pode ser diferenciável em 0 pois $f'(0)=0$ não é um isomorfismo.

Corolário (Regras de diferenciação) Sejam $f,g : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciáveis no ponto $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

(1) $f+g : U \to \mathbb{R}^n$ e $\lambda . f : U \to \mathbb{R}^n$ são diferenciáveis no ponto x, com

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad , \quad (\lambda f)'(x) = \lambda . f'(x).$$

(2) Quando $n=1$ e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in U$, então $\frac{1}{f} : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto x e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{1}{f(x)^2} \cdot f'(x).$$

(3) Se $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é bilinear então $B(f,g) : U \to \mathbb{R}^p$, dada por

$$B(f,g)(y) = B(f(y), g(y)) \quad ,$$

é diferenciável no ponto x e $B(f,g)'(x).h = B(f'(x).h, g(x)) + B(f(x), g'(x).h)$.

Em particular se $n=1$ e $\begin{array}{l} B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (a,b) \to a.b \end{array}$ então:

$$(f.g)'(x) = B(f,g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

Exercício: Demonstre este corolário.

Obs. As vezes denotaremos aplicações bilineares da mesma forma que produtos, isto é, ao invés de escrever $B(x,y)$ escreveremos $x \cdot y$.

Exemplo. (Diferenciabilidade de prod. internos e normas)

$$\langle f,g\rangle : U \to \mathbb{R} \quad , \quad \langle f,g\rangle(x) = \langle f(x), g(x)\rangle .$$

Como $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é bilinear, a dif de f e g implica a dif. de $\langle f,g\rangle$. Ainda:

$$\langle f,g\rangle'(x).h = \langle f'(x)\cdot h , g(x)\rangle + \langle f(x), g'(x).h\rangle \quad , \forall\, h \in \mathbb{R}^m .$$

- Se tomarmos $f=g$ temos que a f_ξ $|f|^2 : y \to \langle f(y), f(y)\rangle$ é diferenciável e sua derivada é:

$$h \longmapsto 2\langle f'(x).h , f(x)\rangle .$$

- Como $t \to t^{1/2}$ é dif. em $\mathbb{R}-\{0\}$, segue que:

$$(\ast) \qquad |\cdot| : u \mapsto |u| = \langle u,u\rangle^{1/2} \quad \text{é dif. em } \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Exercício. A derivada da função $|\cdot|$ em $(\ast)$ é dada por

$$|\cdot|' : h \longmapsto \frac{\langle h, u\rangle}{\langle u,u\rangle^{1/2}} .$$

Mais precisamente as funções $u \mapsto |u|^2$ e $u \mapsto |u|$ são de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n - \{0\}$ respect.

Muita Muita Muita Atenção

* Se uma norma não provém de um prod. interno, então ela não é necessariamente uma função diferenciável em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, nem $|u|^2$ tem de ser dif.

— Tome p/ exemplo a norma $\|u\|_{sup} = \max\{|x|, |y|\}$ onde $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Esta norma ñ é dif. em nenhum dos ptos $u = (x, x)$.

De fato, tome $u = (x, x)$, $x > 0$. Então

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\|u + t.(x,0)\|_{sup} - \|u\|_{sup}}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{(1+t).x - x}{t} = x$$

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\|u + t.(x,0)\|_{sup} - \|u\|_{sup}}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{x - x}{t} = 0.$$

Então o limite $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\|u + t.h\|_{sup} - \|u\|_{sup}}{t}$ não existe $\therefore$ a função ñ é dif.

Desigualdade do Valor Médio.

Teorema do Valor Médio (caso real)

Seja $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f|(a, a+h)$ é diferenciável. Então existe t_0, $0 < t_0 < 1$ tal que:

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(a + t_0 \cdot h).$$

prova: Suponha que $f(a) = f(a+h)$. Como $[a, a+h]$ é compacto então f assume máximo e mínimo em $[a, a+h]$. Se ambos pertencem aos extremos então $f \equiv 0$. Senão, assuma que $c = \max_{y \in [a,a+h]} f(y) > 0$.

Então $f'(c) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(c+t) - f(c)}{t} \leq 0$; $f'(c) = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(c+t) - f(c)}{t} \geq 0$

Logo $f'(c) = 0 = f(a+h) - f(a)$.

Agora vamos fazer o caso geral. Defina $g : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot (x-a) + f(a) \right].$$

Então $g(a) = 0$, $g(a+h) = f(a+h) - f(a) - f(a+h) + f(a) = 0$.

Logo, existe $c \in (a, a+h)$ tal que: $g'(c) = 0$ $\therefore$

$$0 = f'(c) - \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \Rightarrow f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(c) \blacksquare$$

Vamos generalizar este Teorema para funções reais de várias variáveis.

Notação: $[a,b] := \{ a + t.(b-a) : 0 \leq t \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^m$

- Considere $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diferenciável em um aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Suponha que o segmento $[a, a+h] \subset \mathcal{U}$. Então $\exists \; 0 < t_0 < 1$ tal que:

$$f(a+h) - f(a) = h . f'(a + t_0 . h) \cdot h .$$

prova.

Considere $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(t) = f(a+th)$. Pelo teorema do valor médio, $\exists \; t_0 \in (0,1)$ tal que:

$$\phi'(t_0) = \phi(1) - \phi(0)$$

$$\therefore \quad f'(a + t.h) \cdot h = f(a + 1.h) - f(a + 0.h) = f(a+h) - f(a) \quad \blacksquare$$

* Para funções $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, com $n > 1$, não existe uma igualdade do valor médio.

Exemplo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = e^{it} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Então $f'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t) \neq (0,0) \; \forall \; t \in \mathbb{R}$.

Observe que $|f'(t)| = 1, \; \forall \; t \in \mathbb{R}$ mas $f(2\pi) = f(0) = (1,0)$ $\therefore$

$$f(2\pi) - f(0) = 0 \neq 2\pi . f'(t) \;, \forall \; t \in \mathbb{R} .$$

Teorema (Desigualdade do Valor Médio)

Seja $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ contínua no conjunto aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Se o segmento $[a, a+h] \subset \mathcal{U}$ e f é dif. em todo o $(a, a+h)$ então

$$|f(a+h) - f(a)| \leq |h| \cdot \sup_{0<t<1} |f'(a+t \cdot h)|.$$

demonstração:

Suponha que f é diferenciável em a.

Defina $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ por $\phi(t) = f(a + t h) \in \mathbb{R}^n$.

Então ϕ é cont. em $[0,1]$ e dif. em $[0,1)$. Como $\phi(0) = f(a)$,

$\phi(1) = f(a+h)$, $\phi'(t) = f'(a+th) \cdot h$, basta provar que:

$$|\phi(1) - \phi(0)| \leq M$$

onde $M = \sup_{0 \leq t < 1} |\phi'(t)|$.

- defina, para cada $\varepsilon > 0$ o conjunto:

$$X_\varepsilon := \{ t \in [0,1] \ : \ |\phi(s) - \phi(0)| \leq (M + \varepsilon) \cdot s \ , \ \forall \ s \in [0,t] \}.$$

De fato X_ε é um intervalo fechado da forma $[0, \alpha]$.

Vamos provar que $\alpha = 1$. Suponha por absurdo que $\alpha < 1$. Então:

$\exists \delta > 0$ tq $\alpha + \delta < 1$ e tq

$$0 \leq h < \delta \Rightarrow \phi(\alpha+h) = \phi(\alpha) + \phi'(\alpha).h + r(h), \text{ com } |r(h)| \leq \varepsilon |h|.$$

Então $|\phi(\alpha+h) - \phi(\alpha)| = |\phi'(\alpha).h + r(h)| \leq (M+\varepsilon).h$ se $0 \leq h < \delta$.

Então, como $\alpha \in X_\varepsilon$ tb temos: $|\phi(\alpha) - \phi(0)| \leq (M+\varepsilon)\alpha \therefore$

$|\phi(\alpha+h) - \phi(0)| \leq (M+\varepsilon).(h+\alpha) \therefore h+\alpha \in X_\varepsilon$, absurdo!

O mesmo argumento funciona se f é dif. em um segmento $[a,b]$.

Então, se a desigualdade vale para um segmento $[a,b]$ e $[b,c]$ então vale p/ $[a,c]$ ■