Obs. Caso exista, a derivada parcial $\partial_1 f(a,b)$ é a derivada da aplicação parcial:

$$x \longmapsto f(x,b) \text{ no ponto } a \in E.$$

Análogo p/ $\partial_2 f(a,b)$.

Logo todas as regras de derivadas normais se aplicam tb p/ as parciais.

Af. $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ dif em $c \in \mathcal{U} \Rightarrow$ qq que seja a decomposição $\mathbb{R}^m = E \oplus F$, com $c = (a,b)$, as derivadas parciais

$$\partial_1 f(a,b) \quad e \quad \partial_2 f(a,b)$$

existem e

$$f'(c) \cdot (h,k) = \partial_1 f(c) \cdot h + \partial_2 f(c) \cdot k$$

Em outras palavras: $\partial_1 f(c) = f'(c) | E$, $\partial_2 f(c) = f'(c) | F$.

prova.

Dado (h,k) qualquer temos:

$$f(a+h, b+0) = f(a,b) + f'(c) \cdot (h,0) + r(h,0)$$

$$f(a, b+k) = f(a,b) + f'(c) \cdot (0,k) + r(0,k)$$

Então $\partial_1 f(c)$ e $\partial_2 f(c)$ existem e: $\partial_1 f(c) \cdot h = f'(c) \cdot (h,0)$ e $\partial_2 f(c) \cdot k = f'(c) \cdot (0,k)$. Logo:

$$f'(c)\cdot(h,k) = f'(c)\cdot(h,0) + f'(c)\cdot(0,k) =$$

$$= \partial_1 f(c)\cdot h + \partial_2 f(c)\cdot k \quad \blacksquare$$

Cuidado. A recíproca é falsa. O contra-exemplo já foi usado antes:

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$, $\quad f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \qquad f(0,0)=0$$

possui derivadas parciais na origem $c=(0,0)$ mas não é dif. em $c=(0,0)$.

- Dados um conjunto aberto $U\subset\mathbb{R}^m$ e um cjto arbitrário Y, pode-se falar da derivada parcial

$$\partial_1 f(a,b):\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

de uma aplicação $f: U\times Y\rightarrow\mathbb{R}^n$.

Ela é definida como a derivada ordinária da aplicação parcial

$$x\longmapsto f(x,b)$$

de U em $\mathbb{R}^n$, no ponto a.

- Condição Suficiente para derivabilidade.

Teorema. Sejam $\mathbb{R}^m = E \oplus F$ uma dec. em soma direta e $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ um aberto.
Uma aplicação $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 se, e somente se,

para todo $z = (x, y) \in \mathcal{U}$ as derivadas parciais $\partial_1 f(z) : E \to \mathbb{R}^n$,

$\partial_2 f(z) : F \to \mathbb{R}^n$ existem e, além disso, as aplicações

$$\partial_1 f : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n) \quad e \quad \partial_2 f : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(F, \mathbb{R}^n)$$

são contínuas.

demonstração: Se $f \in C^1$ então as derivadas parciais $\partial_1 f$ e $\partial_2 f$ existem em cada $z \in \mathcal{U}$, com

$$\partial_1 f(z) = f'(z)|E, \quad \partial_2 f(z) = f'(z)|F$$

então $\partial_1 f$ e $\partial_2 f$ variam cont. em z.

- Reciprocamente, suponha que ambas existem e dependem continuamente de $z = (x, y) \in \mathcal{U}$.

Vamos mostrar que $f'(x)$ existe e é igual a

$$(h, k) \to \partial_1 f(x) \cdot h + \partial_2 f(x) \cdot k.$$

De fato:

$$|f(x+h, y+k) - f(x,y) - \partial_1 f(x,y)\cdot h - \partial_2 f(x,y)\cdot k| =$$

$$|f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - \partial_1 f(x,y)\cdot h + f(x, y+k) - f(x,y) - \partial_2 f(x)\cdot k| \leq$$

$$\leq |h| \cdot \sup |\partial_1 f(x+sh, y+k) - \partial_1 f(x,y)| +$$

$$|k| \cdot \sup |\partial_2 f(x, y+tk) - \partial_2 f(x,y)|,$$

e aí o Teo segue da cont. de $\partial_1 f$ e $\partial_2 f$ ■

– É claro que podemos considerar qualquer decomposição em soma direta

$$\mathbb{R}^m = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_r$$

e definir as derivadas parciais: $\partial_i f(z) : E_i \to \mathbb{R}^n$ de uma aplicação $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ ($\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto) relativamente a esta decomposição.

- O Teorema anterior vale nesta situação mais geral.

- No caso da dec. usual: $\mathbb{R}^m = E_1 \oplus \dots \oplus E_m$, onde cada E_i é o espaço gerado por e_i; identificamos cada $\partial_i f(z)$ com o vetor $\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)$.

Corolário. Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Uma aplicação $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, com

$$f(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z)),$$

é de classe $C^k \iff$ todas as derivadas parciais mistas $\frac{\partial^\alpha f_i}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\alpha}}(z)$, $z \in \mathcal{U}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq i_1, \dots, i_\alpha \leq m$, de ordem $\alpha \leq k$ existem e dependem continuamente

• A demonstração é por indução. O teo diz que $f \in C^1 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existem e são contínuas.

Agora $f \in C^2 \Leftrightarrow f' \in C^1 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial f'}{\partial x_i}(x)}_{f''(x)\cdot e_i}$ existem e são contínuas

$f''(x) \cdot e_i$ que é uma função

$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f'}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ existe e é contínua em x.

Por indução segue o resultado ■

O Teorema de Schwarz

Teorema. Seja $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^2 ($\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto).

Para cada $x \in \mathcal{U}$, a segunda derivada $f''(x) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é uma aplicação bilinear simétrica, isto é,

$$f''(x).(u,v) = f''(x).(v,u), \ \forall\, u,v \in \mathbb{R}^m.$$

Corolário. Seja $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k. Então, para cada $x \in \mathcal{U}$, a k-ésima derivada $f^{(k)}(x) \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é uma aplicação k-linear simétrica.

Idéia da prova: Tome $k = 3$ por exemplo.

(1) f''' é a derivada de f'', então

$$f'': \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}_2^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

$$\begin{aligned} \therefore\ f''': \ & \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_2^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \\ & u \longmapsto f'''(u): \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}_2^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad v \longmapsto f'''(u).v \end{aligned}$$

Então $f'''(x).(u,v,w) = (f'''(x).u).(v,w) = (f'''(x).u).(w,v) =$

$$= f'''(x).(u,w,v).$$

Por outro lado, f''' é a segunda derivada de f'.

$$f': \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

$$f''': \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$$

$$x \longmapsto f'''(x) : (u,v) \mapsto f'''_{(x)}(u,v) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

Então pelo caso $k=2$, já sabemos que $f'''(x)$ é bilinear simétrica $\therefore$

$$f'''(x)\cdot(u,v,\omega) = (f'''(x)\cdot(u,v))\cdot\omega = (f'''(x)\cdot(v,u))\cdot\omega =$$

$$= f'''(x)\cdot(v,u,\omega) \,.$$

Logo f''' é simétrica ■

Corolário. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $f: U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k. Para cada inteiro α, $1 \leq \alpha \leq k$, as derivadas parciais mistas de ordem α.

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\alpha}}(x) \quad , \; 1 \leq i_1, \ldots, i_\alpha \leq m$$

não dependem da ordem em que foram efetuadas as derivações.

prova. Por definição:

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\alpha}}(x) = f^{(\alpha)}(x)\cdot(e_{i_1}, \ldots, e_{i_\alpha})$$

da simetria segue o resultado ■