– Consequência imediata

- Se $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e sua derivada é limitada em $\mathcal{U}$

$$|f'(x)| \leq M \ , \ \forall \ x \in \mathcal{U}$$

então f satisfaz uma condição de Lipschitz em todos os segmentos fechados $[x, x+h] \subset \mathcal{U}$ ∴

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M \cdot |h| .$$

Proposição: Dado o aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, seja $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no ponto $x_0 \in \mathcal{U}$. Se a derivada

$$f'(x_0): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

é uma transf. linear injetiva, então $\exists \ \delta > 0$ e $c > 0$ tais que:

$$|h| < \delta \Rightarrow x_0 + h \in \mathcal{U} \quad e \quad |f(x_0+h) - f(x_0)| \geq c \cdot |h| .$$

– prova:

De fato $f'(x_0)$ é um homeomorfismo linear de $\mathbb{R}^m$ sobre $F = f'(x_0) \cdot \mathbb{R}^m$

Então $\exists \ c > 0$ tal que: $\forall \ h \in \mathbb{R}^m$, $\left| f'(x_0) \cdot \dfrac{h}{|h|} \right| \geq 2c$.

$$\therefore \quad |f'(x_0) \cdot h| \geq 2c \cdot |h| .$$

Seja agora $\delta>0$ tal que $|h|<\delta$ implique $(x_0+h)\in \mathcal{U}$ e

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+r(h),$$

$$\text{com } |r(h)|<c\cdot|h|.$$

Então:

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|\geq |f'(x_0)\cdot h|-|r(h)|\geq 2\cdot c|h|-c\cdot|h|=c\cdot|h|. \blacksquare$$

Corolário. Se $f'(x_0)$ é injetiva, existe uma vizinhança de x_0 na qual $x\neq x_0$ implica $f(x)\neq f(x_0)$.

prova. Existe $\delta>0$ tal que $\forall\ |h|<\delta$ temos: $|f(x+h)-f(x)|\geq c\cdot|h|$.

Então: $f(x+h)\neq f(x)\ \forall\ |h|<\delta$ $\blacksquare$

Observação importante: Suponhamos que f é C^1. Então nas condições do corolário, conseguimos concluir que f é bijetora em uma vizinhança do zero.

Suponha $x_0=0$, $f(x_0)=0$. (Não há perda de generalidade pois podemos aplicar p/ $g(x)=f(x)-f(0)$)

Escreva $T=f'(x_0)$. Então, $\forall\ x\in$ vizi de 0 temos:

$$f(x)=T\cdot x+r(x) \qquad (f(x)=\underbrace{f(0)}_{0}+Tx+r(x))$$

onde $r(x)=f(x)-T\cdot x$ é C^1.

Além disso: $r'(0) = f'(0) - T = 0$.

Seja c tal que $|T\cdot x| \geq 2\cdot c\cdot |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$ e seja $\delta > 0$ tq

$$|x| < \delta \Rightarrow |r'(x)| < c.$$

Então, para $|x| < \delta$ e $|y| < \delta$, temos:

$|r(y) - r(x)| \leq c\cdot|y - x|$ e portanto, na bola aberta de centro x_0 e raio δ, vale:

$$|f(y) - f(x)| = |T\cdot(y - x) + r(y) - r(x)| \geq 2c\cdot|y - x| - c|y - x|$$

ou seja,

$$|f(y) - f(x)| \geq c\cdot|y - x|.$$

Derivadas Parciais

- Escreva $\mathbb{R}^m$ como soma direta de dois subespaços E e F

$$\mathbb{R}^m = E \oplus F.$$

$$z \in \mathbb{R}^m, \quad z = (u, v), \quad u \in E, \, v \in F.$$

definição (derivadas parciais)

Dados um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$, as derivadas parciais de f em $(a,b) \in U$ são aplicações lineares

$$\partial_1 f(a,b) : E \to \mathbb{R}^n, \quad \partial_2 f(a,b) : F \to \mathbb{R}^n$$

definidas pelas relações:

$$f(a+h, b) = f(a,b) + \partial_1 f(a,b).h + r_1(h), \quad \lim_{h \to 0} \frac{r_1(h)}{|h|} = 0$$

$$f(a, b+k) = f(a,b) + \partial_2 f(a,b) + r_2(k), \quad \lim_{k \to 0} r_2(k)/|k| = 0.$$

Notações tb usadas: $D_1 f(a,b) := \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ e

$$D_2 f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R}^n).$$

Obs. Caso exista, a derivada parcial $\partial_1 f(a,b)$ é a derivada da aplicação parcial:

$$x \longmapsto f(x,b) \quad \text{no ponto } a \in E.$$

Análogo p/ $\partial_2 f(a,b)$.

Logo todas as regras de derivadas normais se aplicam tb p/ as parciais.

Af. $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ dif em $c \in \mathcal{U} \Rightarrow$ qq que seja a decomposição $\mathbb{R}^m = E \oplus F$, com $c = (a,b)$, as derivadas parciais

$$\partial_1 f(a,b) \quad e \quad \partial_2 f(a,b)$$

existem e

$$f'(c) \cdot (h,k) = \partial_1 f(c) \cdot h + \partial_2 f(c) \cdot k$$

Em outras palavras: $\partial_1 f(c) = f'(c) | E$, $\partial_2 f(c) = f'(c) | F$.

prova.

Dado (h,k) qualquer temos:

$$f(a+h, b+0) = f(a,b) + f'(c) \cdot (h,0) + r(h,0)$$

$$f(a, b+k) = f(a,b) + f'(c) \cdot (0,k) + r(0,k)$$

Então $\partial_1 f(c)$ e $\partial_2 f(c)$ existem e: $\partial_1 f(c) \cdot h = f'(c) \cdot (h,0)$ e $\partial_2 f(c) \cdot k = f'(c) \cdot (0,k)$. Logo:

$$f'(c)\cdot(h,k) = f'(c)\cdot(h,0) + f'(c)\cdot(0,k) =$$

$$= \partial_1 f(c)\cdot h + \partial_2 f(c)\cdot k \quad \blacksquare$$

Cuidado. A recíproca é falsa. O contra-exemplo já foi usado antes:

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$, $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, \qquad f(0,0) = 0$$

possui derivadas parciais na origem $c=(0,0)$ mas não é dif. em $c=(0,0)$.

- Dadas um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e um cjto arbitrário Y, pode-se falar da derivada parcial

$$\partial_1 f(a,b) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

de uma aplicação $f : U \times Y \to \mathbb{R}^n$.

Ela é definida como a derivada ordinária da aplicação parcial

$$x \longmapsto f(x,b)$$

de U em $\mathbb{R}^n$, no ponto a.

- Condição Suficiente para derivabilidade.

Teorema . Sejam $\mathbb{R}^m = E \oplus F$ uma dec. em soma direta e $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ um aberto.

Uma aplicação $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 se, e somente se,

para todo $z = (x, y) \in \mathcal{U}$ as derivadas parciais $\partial_1 f(z) : E \to \mathbb{R}^n$,

$\partial_2 f(z) : F \to \mathbb{R}^n$ existem e, além disso, as aplicações

$$\partial_1 f : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n) \quad e \quad \partial_2 f : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(F, \mathbb{R}^n)$$

são contínuas.

demonstração: Se $f \in C^1$ então as derivadas parciais $\partial_1 f$ e $\partial_2 f$ existem em cada $z \in \mathcal{U}$, com

$$\partial_1 f(z) = f'(z)|E \ , \ \partial_2 f(z) = f'(z)|F$$

então $\partial_1 f$ e $\partial_2 f$ variam cont. em z.

- Reciprocamente, suponha que ambas existem e dependem continuamente de $z = (x, y) \in \mathcal{U}$.

Vamos mostrar que $f'(x)$ existe e é igual a

$$(h, k) \to \partial_1 f(x) \cdot h + \partial_2 f(x) \cdot k.$$

De fato:

$$|f(x+h, y+k) - f(x,y) - \partial_1 f(x,y)\cdot h - \partial_2 f(x,y)\cdot k| =$$

$$|f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - \partial_1 f(x,y)\cdot h + f(x, y+k) - f(x,y) - \partial_2 f(x)\cdot k| \leq$$

$$\leq |h| \cdot \sup |\partial_1 f(x+sh, y+k) - \partial_1 f(x,y)| +$$

$$|k| \cdot \sup |\partial_2 f(x, y+tk) - \partial_2 f(x,y)|,$$

e aí o Teo segue da cont. de $\partial_1 f$ e $\partial_2 f$ $\blacksquare$