Anéis de grupo $*$-limpos

Paula Murgel Veloso

Universidade Federal Fluminense, Departamento de Análise, Niterói – RJ

2 de outubro de 2015

Algumas definições

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

- *grupo de unidades de A*:

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

- *grupo de unidades de* A:
  $\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\, \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$;

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

- *grupo de unidades de A*:
  $\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\, \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$; u é uma *unidade* em A se $u \in \mathcal{U}(A)$.

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

- *grupo de unidades de A*:
  $\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\, \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$; u é uma *unidade* em A se $u \in \mathcal{U}(A)$.
- *elemento idempotente*:

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

- *grupo de unidades de A*: $\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\, \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$; u é uma *unidade* em A se $u \in \mathcal{U}(A)$.
- *elemento idempotente*: $e \in A$ tal que $e^2 = e$.

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

- *grupo de unidades de* A:
  $\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\ \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$; u é uma *unidade* em A se $u \in \mathcal{U}(A)$.
- *elemento idempotente*: $e \in A$ tal que $e^2 = e$.
  $e, f \in A$ são *idempotentes ortogonais* se são ambos idempotentes e $ef = 0$.

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

- *grupo de unidades de A*: $\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\, \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$; u é uma *unidade* em A se $u \in \mathcal{U}(A)$.
- *elemento idempotente*: $e \in A$ tal que $e^2 = e$. $e, f \in A$ são *idempotentes ortogonais* se são ambos idempotentes e $ef = 0$.
- *elemento nilpotente*:

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

- *grupo de unidades de A*:
  $\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\, \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$; u é uma *unidade* em A se $u \in \mathcal{U}(A)$.
- *elemento idempotente*: $e \in A$ tal que $e^2 = e$.
  $e, f \in A$ são *idempotentes ortogonais* se são ambos idempotentes e $ef = 0$.
- *elemento nilpotente*: $x \in A$ tal que $x^n = 0$ para algum $n \geq 1$.
- *radical de Jacobson de A*:
  $\mathcal{J}(A) = \bigcap_{M \text{ ideal maximal à esquerda de } A} M$.

Algumas definições (cont.)

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*:

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2 $(* : A \longrightarrow A$;

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2 $(* : A \longrightarrow A; \forall a, b \in A,$

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2 $(* : A \longrightarrow A; \forall a, b \in A,\ (a+b)^* = a^* + b^*,\ (ab)^* = b^* a^*,\ (a^*)^* = a)$.

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2 $(* : A \longrightarrow A; \forall a, b \in A, (a+b)^* = a^* + b^*, (ab)^* = b^* a^*, (a^*)^* = a)$.
- $*$-*anel*:

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2 $(* : A \longrightarrow A; \forall a, b \in A,\ (a+b)^* = a^* + b^*,\ (ab)^* = b^* a^*,\ (a^*)^* = a)$.
- $*$-*anel*: anel com involução.

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2 ($* : A \longrightarrow A$; $\forall a, b \in A$, $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(ab)^* = b^* a^*$, $(a^*)^* = a$).
- $*$-*anel*: anel com involução.
- *projeção*:

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2 ($* : A \longrightarrow A$; $\forall a, b \in A$, $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(ab)^* = b^* a^*$, $(a^*)^* = a$).
- $*$-*anel*: anel com involução.
- *projeção*: $p \in A$, com A um $*$-anel, tal que p é idempotente

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2 $(* : A \longrightarrow A; \forall a, b \in A, (a+b)^* = a^* + b^*, (ab)^* = b^* a^*, (a^*)^* = a)$.
- $*$-*anel*: anel com involução.
- *projeção*: $p \in A$, com A um $*$-anel, tal que p é idempotente e $*$-simétrico (i.e., $p^* = p$).

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2 ($* : A \longrightarrow A$; $\forall a, b \in A$, $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(ab)^* = b^* a^*$, $(a^*)^* = a$).
- $*$-*anel*: anel com involução.
- *projeção*: $p \in A$, com A um $*$-anel, tal que p é idempotente e $*$-simétrico (i.e., $p^* = p$).
- *involução de grupo*:

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2 $(* : A \longrightarrow A;\ \forall a, b \in A,\ (a+b)^* = a^* + b^*,\ (ab)^* = b^* a^*,\ (a^*)^* = a)$.
- $*$-*anel*: anel com involução.
- *projeção*: $p \in A$, com A um $*$-anel, tal que p é idempotente e $*$-simétrico (i.e., $p^* = p$).
- *involução de grupo*: anti-automorfismo (de grupo) de ordem 2

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2 $(* : A \longrightarrow A;\ \forall a, b \in A,\ (a+b)^* = a^* + b^*,\ (ab)^* = b^* a^*,$ $(a^*)^* = a)$.
- $*$-*anel*: anel com involução.
- *projeção*: $p \in A$, com A um $*$-anel, tal que p é idempotente e $*$-simétrico (i.e., $p^* = p$).
- *involução de grupo*: anti-automorfismo (de grupo) de ordem 2 $(* : G \longrightarrow G;$

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2 $(* : A \longrightarrow A$; $\forall a, b \in A$, $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(ab)^* = b^* a^*$, $(a^*)^* = a)$.
- $*$-*anel*: anel com involução.
- *projeção*: $p \in A$, com A um $*$-anel, tal que p é idempotente e $*$-simétrico (i.e., $p^* = p$).
- *involução de grupo*: anti-automorfismo (de grupo) de ordem 2 $(* : G \longrightarrow G$; $\forall x, y \in G$,

Algumas definições (cont.)

- *involução de anel*: anti-automorfismo (de anel) de ordem 2 ($* : A \longrightarrow A$; $\forall a, b \in A$, $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(ab)^* = b^* a^*$, $(a^*)^* = a$).
- $*$-*anel*: anel com involução.
- *projeção*: $p \in A$, com A um $*$-anel, tal que p é idempotente e $*$-simétrico (i.e., $p^* = p$).
- *involução de grupo*: anti-automorfismo (de grupo) de ordem 2 ($* : G \longrightarrow G$; $\forall x, y \in G$, $(xy)^* = y^* x^*$, $(x^*)^* = x$).

Elementos regulares e unit-regulares

(Lam [4, Chapter 2, Section 4])

Elementos regulares e unit-regulares

(Lam [4, Chapter 2, Section 4])

$a \in A$ é um *elemento (von Neumann-)regular* se existe $b \in A$ tal que $a = aba$.

Elementos regulares e unit-regulares

(Lam [4, Chapter 2, Section 4])

$a \in A$ é um *elemento (von Neumann-)regular* se existe $b \in A$ tal que $a = aba$.

$a \in A$ é um *elemento unit-regular* se existe $u \in \mathcal{U}(A)$ tal que $a = aua$.

Elementos regulares e unit-regulares

(Lam [4, Chapter 2, Section 4])

$a \in A$ é um *elemento (von Neumann-)regular* se existe $b \in A$ tal que $a = aba$.

$a \in A$ é um *elemento unit-regular* se existe $u \in \mathcal{U}(A)$ tal que $a = aua$.

Exemplos

- **Zero:** $0 = 0a0$, para todo $a \in A$;

Elementos regulares e unit-regulares

(Lam [4, Chapter 2, Section 4])

$a \in A$ é um *elemento (von Neumann-)regular* se existe $b \in A$ tal que $a = aba$.

$a \in A$ é um *elemento unit-regular* se existe $u \in \mathcal{U}(A)$ tal que $a = aua$.

Exemplos

- **Zero:** $0 = 0a0$, para todo $a \in A$;
- **Elementos idempotentes:** $e = e1e$;

Elementos regulares e unit-regulares

(Lam [4, Chapter 2, Section 4])

$a \in A$ é um *elemento (von Neumann-)regular* se existe $b \in A$ tal que $a = aba$.

$a \in A$ é um *elemento unit-regular* se existe $u \in \mathcal{U}(A)$ tal que $a = aua$.

Exemplos

- **Zero:** $0 = 0a0$, para todo $a \in A$;
- **Elementos idempotentes:** $e = e1e$;
- **Unidades:** $u = uu^{-1}u$.

Anéis (von Neumann-)regulares e unit-regulares

Anéis (von Neumann-)regulares e unit-regulares

A é um *anel (von Neumann-)regular* se todo elemento $a \in A$ é regular.

Anéis (von Neumann-)regulares e unit-regulares

A é um *anel (von Neumann-)regular* se todo elemento $a \in A$ é regular.

A é um *anel (unit-)regular* se todo elemento $a \in A$ é unit-regular.

Anéis (von Neumann-)regulares e unit-regulares

A é um *anel (von Neumann-)regular* se todo elemento $a \in A$ é regular.

A é um *anel (unit-)regular* se todo elemento $a \in A$ é unit-regular.

Teorema

São equivalentes:

Anéis (von Neumann-)regulares e unit-regulares

A é um *anel (von Neumann-)regular* se todo elemento $a \in A$ é regular.

A é um *anel (unit-)regular* se todo elemento $a \in A$ é unit-regular.

Teorema

São equivalentes:

- A é anel regular;

Anéis (von Neumann-)regulares e unit-regulares

A é um *anel (von Neumann-)regular* se todo elemento $a \in A$ é regular.

A é um *anel (unit-)regular* se todo elemento $a \in A$ é unit-regular.

Teorema

São equivalentes:

- A é anel regular;
- todo ideal principal/finitamente gerado à esquerda é gerado por um idempotente;

Anéis (von Neumann-)regulares e unit-regulares

A é um *anel (von Neumann-)regular* se todo elemento $a \in A$ é regular.

A é um *anel (unit-)regular* se todo elemento $a \in A$ é unit-regular.

Teorema

São equivalentes:

- A é anel regular;
- todo ideal principal/finitamente gerado à esquerda é gerado por um idempotente;
- todo ideal principal/finitamente gerado à esquerda é um somando direto do A-módulo A.

Anéis regulares e unit-regulares (cont.)

Anéis regulares e unit-regulares (cont.)

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é unit-regular.

Anéis regulares e unit-regulares (cont.)

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é unit-regular.
- Todo anel Booleano é unit-regular.

Anéis regulares e unit-regulares (cont.)

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é unit-regular.
- Todo anel Booleano é unit-regular.
  [Um anel Booleano é aquele em que todo elemento é idempotente.]

Anéis regulares e unit-regulares (cont.)

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é unit-regular.
- Todo anel Booleano é unit-regular.
  [Um anel Booleano é aquele em que todo elemento é idempotente.]
- D anel de divisão $\implies M_n(D)$ é regular.

Anéis regulares e unit-regulares (cont.)

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é unit-regular.
- Todo anel Booleano é unit-regular.
  [Um anel Booleano é aquele em que todo elemento é idempotente.]
- D anel de divisão $\implies M_n(D)$ é regular.

Proposição

$a \in A$ é unit-regular $\iff a = ue$, para algum idempotente $e \in A$ e algum $u \in \mathcal{U}(A)$.

Elementos limpos e $*$-limpos

Elementos limpos e $*$-limpos

$a \in A$ é um *elemento limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + e$,

Elementos limpos e $*$-limpos

$a \in A$ é um *elemento limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + e$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $e \in A$ idempotente.

Elementos limpos e $*$-limpos

$a \in A$ é um *elemento limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + e$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $e \in A$ idempotente.

$a \in A$, com A um $*$-anel, é um *elemento $*$-limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + p$,

Elementos limpos e $*$-limpos

$a \in A$ é um *elemento limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + e$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $e \in A$ idempotente.

$a \in A$, com A um $*$-anel, é um *elemento $*$-limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + p$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $p \in A$ projeção.

Elementos limpos e $*$-limpos

$a \in A$ é um *elemento limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + e$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $e \in A$ idempotente.

$a \in A$, com A um $*$-anel, é um *elemento $*$-limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + p$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $p \in A$ projeção.

Exemplos

- **Unidades:** $u = u + 0$;

Elementos limpos e $*$-limpos

$a \in A$ é um *elemento limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + e$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $e \in A$ idempotente.

$a \in A$, com A um $*$-anel, é um *elemento $*$-limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + p$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $p \in A$ projeção.

Exemplos

- **Unidades:** $u = u + 0$;
- **Elementos idempotentes:** $e = (2e - 1) + (1 - e)$;

Elementos limpos e $*$-limpos

$a \in A$ é um *elemento limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + e$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $e \in A$ idempotente.

$a \in A$, com A um $*$-anel, é um *elemento $*$-limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + p$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $p \in A$ projeção.

Exemplos

- **Unidades:** $u = u + 0$;
- **Elementos idempotentes:** $e = (2e - 1) + (1 - e)$;
- **Elementos nilpotentes:** $x = (x - 1) + 1$.

Anéis limpos e $*$-limpos

Anéis limpos e $*$-limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Anéis limpos e $*$-limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Um $*$-anel A é um *anel $*$-limpo* se todo elemento $a \in A$ é $*$-limpo.

Anéis limpos e $*$-limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Um $*$-anel A é um *anel* $*$*-limpo* se todo elemento $a \in A$ é $*$-limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.

Anéis limpos e $*$-limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Um $*$-anel A é um *anel $*$-limpo* se todo elemento $a \in A$ é $*$-limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.
- Todo anel Booleano é limpo.

Anéis limpos e $*$-limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Um $*$-anel A é um *anel $*$-limpo* se todo elemento $a \in A$ é $*$-limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.
- Todo anel Booleano é limpo.
- $\mathbb{Z}$ não é limpo.

Anéis limpos e $*$-limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Um $*$-anel A é um *anel $*$-limpo* se todo elemento $a \in A$ é $*$-limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.
- Todo anel Booleano é limpo.
- $\mathbb{Z}$ não é limpo.
- Anéis de polinômios não são limpos.

Anéis limpos e $*$-limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Um $*$-anel A é um *anel $*$-limpo* se todo elemento $a \in A$ é $*$-limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.
- Todo anel Booleano é limpo.
- $\mathbb{Z}$ não é limpo.
- Anéis de polinômios não são limpos. (Nicholson & Zhou, 2004 [9, Proposition 13])

Anéis limpos e $*$-limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Um $*$-anel A é um *anel $*$-limpo* se todo elemento $a \in A$ é $*$-limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.
- Todo anel Booleano é limpo.
- $\mathbb{Z}$ não é limpo.
- Anéis de polinômios não são limpos. (Nicholson & Zhou, 2004 [9, Proposition 13])
- A limpo $\implies$ $M_n(A)$ limpo.

Anéis limpos e $*$-limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Um $*$-anel A é um *anel $*$-limpo* se todo elemento $a \in A$ é $*$-limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.
- Todo anel Booleano é limpo.
- $\mathbb{Z}$ não é limpo.
- Anéis de polinômios não são limpos. (Nicholson & Zhou, 2004 [9, Proposition 13])
- A limpo $\implies$ $M_n(A)$ limpo. (Han & Nicholson, 2001 [3, Corollary 1])

Anéis limpos (cont.)

Exemplos e propriedades (cont.)

- $\Pi_i A_i$ limpo $\iff$ cada A_i limpo.

Anéis limpos (cont.)

Exemplos e propriedades (cont.)

- $\Pi_i A_i$ limpo $\iff$ cada A_i limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [9, Example 3])

Anéis limpos (cont.)

Exemplos e propriedades (cont.)

- $\Pi_i A_i$ limpo $\iff$ cada A_i limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [9, Example 3])
- Toda imagem homomórfica de um anel limpo é um anel limpo.

Anéis limpos (cont.)

Exemplos e propriedades (cont.)

- $\Pi_i A_i$ limpo $\iff$ cada A_i limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [9, Example 3])
- Toda imagem homomórfica de um anel limpo é um anel limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [9, Theorem 22])

Anéis limpos (cont.)

Exemplos e propriedades (cont.)

- $\Pi_i A_i$ limpo $\iff$ cada A_i limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [9, Example 3])
- Toda imagem homomórfica de um anel limpo é um anel limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [9, Theorem 22])
- Subanéis de anéis limpos podem não ser limpos

Anéis limpos (cont.)

Exemplos e propriedades (cont.)

- $\Pi_i A_i$ limpo $\iff$ cada A_i limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [9, Example 3])
- Toda imagem homomórfica de um anel limpo é um anel limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [9, Theorem 22])
- Subanéis de anéis limpos podem não ser limpos (e.g., $\mathbb{Z}$ é um subanel de $\mathbb{Q}$).
- Todo anel $*$-limpo é um $*$-anel limpo.

Breve histórico

Breve histórico

von Neumann propôs a noção de anéis regulares em 1936 [7] quando do seu estudo com Murray sobre álgebras de operadores em espaços de Hilbert e geometria contínua.

Breve histórico

von Neumann propôs a noção de anéis regulares em 1936 [7] quando do seu estudo com Murray sobre álgebras de operadores em espaços de Hilbert e geometria contínua.

Nicholson definiu anéis limpos em 1977 [8] enquanto estudava anéis 'exchange':

Breve histórico

von Neumann propôs a noção de anéis regulares em 1936 [7] quando do seu estudo com Murray sobre álgebras de operadores em espaços de Hilbert e geometria contínua.

Nicholson definiu anéis limpos em 1977 [8] enquanto estudava anéis 'exchange': se todos idempotentes são centrais, então todo elemento de um anel 'exchange' é a soma de uma unidade e um idempotente.

Breve histórico

von Neumann propôs a noção de anéis regulares em 1936 [7] quando do seu estudo com Murray sobre álgebras de operadores em espaços de Hilbert e geometria contínua.

Nicholson definiu anéis limpos em 1977 [8] enquanto estudava anéis 'exchange': se todos idempotentes são centrais, então todo elemento de um anel 'exchange' é a soma de uma unidade e um idempotente.

Han e Nicholson foram os primeiros a abordar a propriedade de limpeza em anéis de grupos em 2001. [3]

Breve histórico (cont.)

Notar: anéis limpos são o "análogo aditivo" de anéis unit-regulares.

Breve histórico (cont.)

Notar: anéis limpos são o "análogo aditivo" de anéis unit-regulares.

Pergunta:

Qual é exatamente a relação entre anéis unit-regulares e anéis limpos?

Breve histórico (cont.)

Notar: anéis limpos são o "análogo aditivo" de anéis unit-regulares.

Pergunta:

Qual é exatamente a relação entre anéis unit-regulares e anéis limpos?

Teorema (Camillo & Khurana, 2001 [1, Theorem 1])

Um anel A é unit-regular $\iff$ para todo $a \in A$, existem $u \in \mathcal{U}(R)$ e um idempotente $e \in R$ tais que $a = e + u$ (i.e., A é um anel limpo) e $aR \cap eR = \{0\}$.

Breve histórico (cont.)

Pergunta de T. Y. Lam:

(na *Conference on Algebra and Its Applications*, 2005, Ohio University)

Breve histórico (cont.)

Pergunta de T. Y. Lam:

(na *Conference on Algebra and Its Applications*, 2005, Ohio University)
Quais álgebras de von Neumann são limpas como anéis?

Breve histórico (cont.)

Pergunta de T. Y. Lam:

(na *Conference on Algebra and Its Applications*, 2005, Ohio University)
Quais álgebras de von Neumann são limpas como anéis?

Álgebras de von Neumann são $*$-anéis;

Breve histórico (cont.)

Pergunta de T. Y. Lam:

(na *Conference on Algebra and Its Applications*, 2005, Ohio University)
Quais álgebras de von Neumann são limpas como anéis?

Álgebras de von Neumann são $*$-anéis; é mais simples com projeções do que com idempotentes.

Breve histórico (cont.)

Pergunta de T. Y. Lam:

(na *Conference on Algebra and Its Applications*, 2005, Ohio University)
Quais álgebras de von Neumann são limpas como anéis?

Álgebras de von Neumann são $*$-anéis; é mais simples com projeções do que com idempotentes.

Em 2010, Vaš propôs a definição de anel $*$-limpo em [12].

Breve histórico (cont.)

Pergunta de T. Y. Lam:

(na *Conference on Algebra and Its Applications*, 2005, Ohio University)
Quais álgebras de von Neumann são limpas como anéis?

Álgebras de von Neumann são $*$-anéis; é mais simples com projeções do que com idempotentes.

Em 2010, Vaš propôs a definição de anel $*$-limpo em [12].

Pergunta de Vaš:

Existem $*$-anéis limpos, mas não $*$-limpos?

Breve histórico (cont.)

Breve histórico (cont.)

Li & Zhou [6, Example 2.6]

$A = T_2(\mathbb{Z}_2)$ (anel das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre $\mathbb{Z}_2$)

Breve histórico (cont.)

Li & Zhou [6, Example 2.6]

$A = T_2(\mathbb{Z}_2)$ (anel das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre $\mathbb{Z}_2$)

- A é um $*$-anel limpo:

Breve histórico (cont.)

Li & Zhou [6, Example 2.6]

$A = T_2(\mathbb{Z}_2)$ (anel das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre $\mathbb{Z}_2$)

- A é um $*$-anel limpo: A é limpo e

Breve histórico (cont.)

Li & Zhou [6, Example 2.6]

$A = T_2(\mathbb{Z}_2)$ (anel das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre $\mathbb{Z}_2$)

- A é um $*$-anel limpo: A é limpo e $* : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ é uma involução;
- A não é $*$-limpo para nenhuma $*$:

Breve histórico (cont.)

Li & Zhou [6, Example 2.6]

$A = T_2(\mathbb{Z}_2)$ (anel das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre $\mathbb{Z}_2$)

- A é um $*$-anel limpo: A é limpo e $* : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ é uma involução;
- A não é $*$-limpo para nenhuma $*$: Suponha, por absurdo, que A seja $*$-limpo para alguma $*$.

Breve histórico (cont.)

Li & Zhou [6, Example 2.6]

$A = T_2(\mathbb{Z}_2)$ (anel das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre $\mathbb{Z}_2$)

- A é um $*$-anel limpo: A é limpo e $* : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ é uma involução;
- A não é $*$-limpo para nenhuma $*$: Suponha, por absurdo, que A seja $*$-limpo para alguma $*$. Assim, $id^* = id$, e $u^* \in \mathcal{U}(A)$ para todo $u \in \mathcal{U}(A)$.

Breve histórico (cont.)

Li & Zhou [6, Example 2.6]

$A = T_2(\mathbb{Z}_2)$ (anel das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre $\mathbb{Z}_2$)

- A é um $*$-anel limpo: A é limpo e $* : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ é uma involução;
- A não é $*$-limpo para nenhuma $*$: Suponha, por absurdo, que A seja $*$-limpo para alguma $*$. Assim, $id^* = id$, e $u^* \in \mathcal{U}(A)$ para todo $u \in \mathcal{U}(A)$. Como $\mathcal{U}(A)$ tem apenas 2 elementos, $u^* = u$, para todo $u \in \mathcal{U}(A)$.

Breve histórico (cont.)

Li & Zhou [6, Example 2.6]

$A = T_2(\mathbb{Z}_2)$ (anel das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre $\mathbb{Z}_2$)

- A é um $*$-anel limpo: A é limpo e $* : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ é uma involução;
- A não é $*$-limpo para nenhuma $*$: Suponha, por absurdo, que A seja $*$-limpo para alguma $*$. Assim, $id^* = id$, e $u^* \in \mathcal{U}(A)$ para todo $u \in \mathcal{U}(A)$. Como $\mathcal{U}(A)$ tem apenas 2 elementos, $u^* = u$, para todo $u \in \mathcal{U}(A)$. Sendo $*$-limpo, $a^* = a$, para todo $a \in A$, i.e., $* = id$.

Breve histórico (cont.)

Li & Zhou [6, Example 2.6]

$A = T_2(\mathbb{Z}_2)$ (anel das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre $\mathbb{Z}_2$)

- A é um $*$-anel limpo: A é limpo e $* : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ é uma involução;
- A não é $*$-limpo para nenhuma $*$: Suponha, por absurdo, que A seja $*$-limpo para alguma $*$. Assim, $id^* = id$, e $u^* \in \mathcal{U}(A)$ para todo $u \in \mathcal{U}(A)$. Como $\mathcal{U}(A)$ tem apenas 2 elementos, $u^* = u$, para todo $u \in \mathcal{U}(A)$. Sendo $*$-limpo, $a^* = a$, para todo $a \in A$, i.e., $* = id$. Logo, A é comutativo – contradição.

Definição

Definição

Li e Zhou [6] foram os primeiros a abordarem a $*$-limpeza em anéis de grupo.

Definição

Li e Zhou [6] foram os primeiros a abordarem a $*$-limpeza em anéis de grupo. No entanto, muito pouco é sabido sobre o assunto.

Definição

Li e Zhou [6] foram os primeiros a abordarem a $*$-limpeza em anéis de grupo. No entanto, muito pouco é sabido sobre o assunto.

R um anel;

Definição

Li e Zhou [6] foram os primeiros a abordarem a $*$-limpeza em anéis de grupo. No entanto, muito pouco é sabido sobre o assunto.

R um anel; G um grupo;

Definição

Li e Zhou [6] foram os primeiros a abordarem a $*$-limpeza em anéis de grupo. No entanto, muito pouco é sabido sobre o assunto.

R um anel; G um grupo;
RG, o *anel de grupo de* G *sobre* R:

Definição

Li e Zhou [6] foram os primeiros a abordarem a $*$-limpeza em anéis de grupo. No entanto, muito pouco é sabido sobre o assunto.

R um anel; G um grupo;
RG, o *anel de grupo de G sobre R*: o R-módulo livre com base G munido de multiplicação definida estendendo-se R-linearmente a multiplicação de G.

Definição

Li e Zhou [6] foram os primeiros a abordarem a $*$-limpeza em anéis de grupo. No entanto, muito pouco é sabido sobre o assunto.

R um anel; G um grupo;
RG, o *anel de grupo de G sobre R*: o R-módulo livre com base G munido de multiplicação definida estendendo-se R-linearmente a multiplicação de G.

$RG = \oplus_{g \in G} Rg$

Definição

Li e Zhou [6] foram os primeiros a abordarem a $*$-limpeza em anéis de grupo. No entanto, muito pouco é sabido sobre o assunto.

R um anel; G um grupo;
RG, o *anel de grupo de* G *sobre* R: o R-módulo livre com base G munido de multiplicação definida estendendo-se R-linearmente a multiplicação de G.

$RG = \bigoplus_{g \in G} Rg$
$\alpha \in RG$; $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g, \alpha_g \in R$

Definição

Li e Zhou [6] foram os primeiros a abordarem a $*$-limpeza em anéis de grupo. No entanto, muito pouco é sabido sobre o assunto.

R um anel; G um grupo;
RG, o *anel de grupo de G sobre R*: o R-módulo livre com base G munido de multiplicação definida estendendo-se R-linearmente a multiplicação de G.

$RG = \oplus_{g \in G} Rg$
$\alpha \in RG$; $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g, \alpha_g \in R$

operações:

Definição

Li e Zhou [6] foram os primeiros a abordarem a $*$-limpeza em anéis de grupo. No entanto, muito pouco é sabido sobre o assunto.

R um anel; G um grupo;
RG, o *anel de grupo de G sobre R*: o R-módulo livre com base G munido de multiplicação definida estendendo-se R-linearmente a multiplicação de G.

$RG = \bigoplus_{g \in G} Rg$
$\alpha \in RG$; $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g, \alpha_g \in R$

operações:
$\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$, $\beta = \sum_{g \in G} \beta_g g \in RG, r \in R$

Definição

Li e Zhou [6] foram os primeiros a abordarem a $*$-limpeza em anéis de grupo. No entanto, muito pouco é sabido sobre o assunto.

R um anel; G um grupo;
RG, o *anel de grupo de G sobre R*: o R-módulo livre com base G munido de multiplicação definida estendendo-se R-linearmente a multiplicação de G.

$RG = \oplus_{g \in G} Rg$
$\alpha \in RG$; $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g, \alpha_g \in R$

operações:
$\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$, $\beta = \sum_{g \in G} \beta_g g \in RG, r \in R$
$\alpha + \beta = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g \in RG$

Definição

Li e Zhou [6] foram os primeiros a abordarem a $*$-limpeza em anéis de grupo. No entanto, muito pouco é sabido sobre o assunto.

R um anel; G um grupo;
RG, o *anel de grupo de G sobre R*: o R-módulo livre com base G munido de multiplicação definida estendendo-se R-linearmente a multiplicação de G.

$RG = \bigoplus_{g \in G} Rg$
$\alpha \in RG$; $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g, \alpha_g \in R$

operações:
$\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$, $\beta = \sum_{g \in G} \beta_g g \in RG, r \in R$
$\alpha + \beta = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g \in RG$
$\alpha \cdot \beta = (\sum_{g \in G} \alpha_g g)(\sum_{h \in G} \beta_h h) = \sum_{g,h \in G} (\alpha_g \beta_h) gh \in RG$

Involuções em anéis de grupos

Involuções em anéis de grupos

G grupo tal que existe $g \neq 1$ com $|\langle g \rangle| \neq 2$;

Involuções em anéis de grupos

G grupo tal que existe $g \neq 1$ com $|\langle g \rangle| \neq 2$;
involução clássica em G: $g \mapsto g^{-1}$.

Involuções em anéis de grupos

G grupo tal que existe $g \neq 1$ com $|\langle g \rangle| \neq 2$;
involução clássica em G: $g \mapsto g^{-1}$.

Se R é um anel comutativo, a extensão R-linear da involução clássica de G nos dá uma involução (de anel) em RG:

Involuções em anéis de grupos

G grupo tal que existe $g \neq 1$ com $|\langle g \rangle| \neq 2$;
involução clássica em G: $g \mapsto g^{-1}$.

Se R é um anel comutativo, a extensão R-linear da involução clássica de G nos dá uma involução (de anel) em RG:
$* : RG \longrightarrow RG$, $\alpha^* = \sum_{g \in G} \alpha_g g^*$

Involuções em anéis de grupos

G grupo tal que existe $g \neq 1$ com $|\langle g \rangle| \neq 2$;
involução clássica em G: $g \mapsto g^{-1}$.

Se R é um anel comutativo, a extensão R-linear da involução clássica de G nos dá uma involução (de anel) em RG:
$* : RG \longrightarrow RG$, $\alpha^* = \sum_{g \in G} \alpha_g g^*$ (*involução clássica em RG*).

Anel local comutativo e grupos cíclicos

Anel local comutativo e grupos cíclicos

Teorema

Sejam R um anel local comutativo e C_3 o grupo cíclico de ordem 3.

- Se $3 \in \mathcal{J}(R)$, então RC_3 é $*$-limpo.

Anel local comutativo e grupos cíclicos

Teorema

Sejam R um anel local comutativo e C_3 o grupo cíclico de ordem 3.

- Se $3 \in \mathcal{J}(R)$, então RC_3 é $*$-limpo.
- Se $3 \notin \mathcal{J}(R)$, então RC_3 é $*$-limpo $\iff$ RC_3 é limpo e a equação $X^2 + X + 1 = 0$ não tem soluções em R.

Anel local comutativo e grupos cíclicos

Teorema

Sejam R um anel local comutativo e C_3 o grupo cíclico de ordem 3.

- Se $3 \in \mathcal{J}(R)$, então RC_3 é $*$-limpo.
- Se $3 \notin \mathcal{J}(R)$, então RC_3 é $*$-limpo $\iff$ RC_3 é limpo e a equação $X^2 + X + 1 = 0$ não tem soluções em R.

Teorema

Sejam R um anel local comutativo e C_4 o grupo cíclico de ordem 4.

- Se $2 \in \mathcal{J}(R)$, então RC_4 é $*$-limpo.

Anel local comutativo e grupos cíclicos

Teorema

Sejam R um anel local comutativo e C_3 o grupo cíclico de ordem 3.

- Se $3 \in \mathcal{J}(R)$, então RC_3 é $*$-limpo.
- Se $3 \notin \mathcal{J}(R)$, então RC_3 é $*$-limpo $\iff$ RC_3 é limpo e a equação $X^2 + X + 1 = 0$ não tem soluções em R.

Teorema

Sejam R um anel local comutativo e C_4 o grupo cíclico de ordem 4.

- Se $2 \in \mathcal{J}(R)$, então RC_4 é $*$-limpo.
- Se $2 \in \mathcal{U}(R)$, então RC_4 é $*$-limpo $\iff$ RC_4 é limpo e a equação $X^2 + 1 = 0$ não tem soluções em R.

Anel local comutativo e grupos não abelianos

Anel local comutativo e grupos não abelianos

Teorema

Seja R um anel local comutativo com $2 \in \mathcal{J}(R)$. Então RS_3 é limpo, mas não $*$-limpo.

Anel local comutativo e grupos não abelianos

Teorema

Seja R um anel local comutativo com $2 \in \mathcal{J}(R)$. Então RS_3 é limpo, mas não $*$-limpo.

Teorema

Seja R um anel local comutativo

- Se $2 \in \mathcal{J}(R)$, então RQ_8 é $*$-limpo.

Anel local comutativo e grupos não abelianos

Teorema

Seja R um anel local comutativo com $2 \in \mathcal{J}(R)$. Então RS_3 é limpo, mas não $*$-limpo.

Teorema

Seja R um anel local comutativo

- Se $2 \in \mathcal{J}(R)$, então RQ_8 é $*$-limpo.
- Se $2 \in \mathcal{U}(R)$, então RQ_8 é $*$-limpo $\iff$ RQ_8 é limpo e a equação $X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 = 0$ não tem soluções em R.

Anel local comutativo e grupos cíclicos

Anel local comutativo e grupos cíclicos

Teorema

Seja R um anel local comutativo.

- Se $n \in \mathcal{J}(R)$, com $3 \leq n \leq 5$, então RC_n é local e $*$-limpo.

Anel local comutativo e grupos cíclicos

Teorema

Seja R um anel local comutativo.

- Se $n \in \mathcal{J}(R)$, com $3 \leq n \leq 5$, então RC_n é local e $*$-limpo.
- Se $n \notin \mathcal{J}(R)$, com $3 \leq n \leq 5$, então RC_n é $*$-limpo $\Longleftrightarrow$ RC_n é limpo e $\Phi_n(X) = 0$ não tem soluções em $R/\mathcal{J}(R)$.

Anel local comutativo e grupos cíclicos

Teorema

Seja R um anel local comutativo.

- Se $n \in \mathcal{J}(R)$, com $3 \leq n \leq 5$, então RC_n é local e $*$-limpo.
- Se $n \notin \mathcal{J}(R)$, com $3 \leq n \leq 5$, então RC_n é $*$-limpo $\iff$ RC_n é limpo e $\Phi_n(X) = 0$ não tem soluções em $R/\mathcal{J}(R)$.
- Se $3 \in \mathcal{J}(R)$, então RC_6 é $*$-limpo $\iff$ RC_6 é limpo.

Anel local comutativo e grupos cíclicos

Teorema

Seja R um anel local comutativo.

- Se $n \in \mathcal{J}(R)$, com $3 \leq n \leq 5$, então RC_n é local e $*$-limpo.
- Se $n \notin \mathcal{J}(R)$, com $3 \leq n \leq 5$, então RC_n é $*$-limpo $\iff$ RC_n é limpo e $\Phi_n(X) = 0$ não tem soluções em $R/\mathcal{J}(R)$.
- Se $3 \in \mathcal{J}(R)$, então RC_6 é $*$-limpo $\iff$ RC_6 é limpo.
- Se $2 \in \mathcal{J}(R)$ ou $6 \notin \mathcal{J}(R)$, então RC_6 é $*$-limpo $\iff$ RC_6 é limpo e $\Phi_3(X) = 0$ não tem soluções em $R/\mathcal{J}(R)$.

Grupos abelianos finitos

Grupos abelianos finitos

K corpo;

Grupos abelianos finitos

K corpo; G grupo abeliano de ordem n;

Grupos abelianos finitos

K corpo; G grupo abeliano de ordem n; $\mathrm{char}(K) \nmid n$

Grupos abelianos finitos

K corpo; G grupo abeliano de ordem n; $\mathrm{char}(K) \nmid n$

Teorema de Maschke $\implies$ KG é uma álgebra de grupo semissimples

Grupos abelianos finitos

K corpo; G grupo abeliano de ordem n; $\mathrm{char}(K) \nmid n$

Teorema de Maschke $\implies$ KG é uma álgebra de grupo semissimples

$KG \simeq \bigoplus_{d|n} a_d K(\zeta_d)$,

Grupos abelianos finitos

K corpo; G grupo abeliano de ordem n; $\text{char}(K) \nmid n$

Teorema de Maschke $\implies$ KG é uma álgebra de grupo semissimples

$KG \simeq \bigoplus_{d|n} a_d K(\zeta_d)$, onde $a_d K(\zeta_d)$ é a soma direta de a_d cópias de $K(\zeta_d)$, ζ_d são raízes primitivas de 1 de ordem d e $a_d = n_d/[K(\zeta_d) : K]$, com n_d o número de elementos de ordem d em G [10]

Grupos abelianos finitos

K corpo; G grupo abeliano de ordem n; $\mathrm{char}(K) \nmid n$

Teorema de Maschke $\implies$ KG é uma álgebra de grupo semissimples

$KG \simeq \bigoplus_{d|n} a_d K(\zeta_d)$, onde $a_d K(\zeta_d)$ é a soma direta de a_d cópias de $K(\zeta_d)$, ζ_d são raízes primitivas de 1 de ordem d e $a_d = n_d/[K(\zeta_d) : K]$, com n_d o número de elementos de ordem d em G [10]

KG é limpo

Grupos abelianos finitos

K corpo; G grupo abeliano de ordem n; $\mathrm{char}(K) \nmid n$

Teorema de Maschke $\implies$ KG é uma álgebra de grupo semissimples

$KG \simeq \bigoplus_{d|n} a_d K(\zeta_d)$, onde $a_d K(\zeta_d)$ é a soma direta de a_d cópias de $K(\zeta_d)$, ζ_d são raízes primitivas de 1 de ordem d e $a_d = n_d/[K(\zeta_d) : K]$, com n_d o número de elementos de ordem d em G [10]

KG é limpo (soma direta de corpos)

Grupos abelianos finitos

K corpo; G grupo abeliano de ordem n; $\mathrm{char}(K) \nmid n$

Teorema de Maschke $\implies$ KG é uma álgebra de grupo semissimples

$KG \simeq \bigoplus_{d|n} a_d K(\zeta_d)$, onde $a_d K(\zeta_d)$ é a soma direta de a_d cópias de $K(\zeta_d)$, ζ_d são raízes primitivas de 1 de ordem d e $a_d = n_d/[K(\zeta_d) : K]$, com n_d o número de elementos de ordem d em G [10]

KG é limpo (soma direta de corpos)

KG é um $*$-anel (com $*$ a involução clássica)

Abordagem *naive*

Abordagem *naive*

Queremos determinar sob que condições KG é um anel $*$-limpo.

Abordagem *naive*

Queremos determinar sob que condições KG é um anel $*$-limpo.

Vamos calcular os idempotentes de KG e verificar sob que condições os mesmos são projeções.

Abordagem *naive*

Queremos determinar sob que condições KG é um anel $*$-limpo.

Vamos calcular os idempotentes de KG e verificar sob que condições os mesmos são projeções.

Consideramos: K corpo <u>algebricamente fechado</u>;

Abordagem *naive*

Queremos determinar sob que condições KG é um anel $*$-limpo.

Vamos calcular os idempotentes de KG e verificar sob que condições os mesmos são projeções.

Consideramos: K corpo algebricamente fechado; G grupo abeliano de ordem n;

Abordagem *naive*

Queremos determinar sob que condições KG é um anel $*$-limpo.

Vamos calcular os idempotentes de KG e verificar sob que condições os mesmos são projeções.

Consideramos: K corpo algebricamente fechado; G grupo abeliano de ordem n; $\mathrm{char}(K) \nmid n$.

Calculando idempotentes centrais primitivos

(Quoos & Veloso [11])

Calculando idempotentes centrais primitivos

(Quoos & Veloso [11])

$KG \simeq K \oplus \ldots \oplus K$ (n cópias de K).

Calculando idempotentes centrais primitivos

(Quoos & Veloso [11])

$KG \simeq K \oplus \ldots \oplus K$ (n cópias de K). Os idempotentes centrais primitivos de KG são as imagens inversas das n-uplas $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Calculando idempotentes centrais primitivos

(Quoos & Veloso [11])

$KG \simeq K \oplus \ldots \oplus K$ (n cópias de K). Os idempotentes centrais primitivos de KG são as imagens inversas das n-uplas $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Escreva $G \simeq C_1 \times \ldots \times C_s$, com $C_i = \langle g_i \, ; \, g_i^{n_i} = 1 \rangle$.

Calculando idempotentes centrais primitivos

(Quoos & Veloso [11])

$KG \simeq K \oplus \ldots \oplus K$ (n cópias de K). Os idempotentes centrais primitivos de KG são as imagens inversas das n-uplas $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Escreva $G \simeq C_1 \times \ldots \times C_s$, com $C_i = \langle g_i \, ; \, g_i^{n_i} = 1 \rangle$.

As n componentes da soma direta $K \oplus \ldots \oplus K$ serão indexadas por s-uplas $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_s)$, com $0 \leq l_i \leq n_i - 1$,:

Calculando idempotentes centrais primitivos

(Quoos & Veloso [11])

$KG \simeq K \oplus \ldots \oplus K$ (n cópias de K). Os idempotentes centrais primitivos de KG são as imagens inversas das n-uplas $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Escreva $G \simeq C_1 \times \ldots \times C_s$, com $C_i = \langle g_i \,;\, g_i^{n_i} = 1 \rangle$.

As n componentes da soma direta $K \oplus \ldots \oplus K$ serão indexadas por s-uplas $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_s)$, com $0 \leq l_i \leq n_i - 1$,: as primeiras n_s coordenadas têm $l_i = 0$, para $i \neq s$, e l_s variando de 0 a $n_s - 1$;

Calculando idempotentes centrais primitivos

(Quoos & Veloso [11])

$KG \simeq K \oplus \ldots \oplus K$ (n cópias de K). Os idempotentes centrais primitivos de KG são as imagens inversas das n-uplas $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Escreva $G \simeq C_1 \times \ldots \times C_s$, com $C_i = \langle g_i \, ; \, g_i^{n_i} = 1 \rangle$.

As n componentes da soma direta $K \oplus \ldots \oplus K$ serão indexadas por s-uplas $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_s)$, com $0 \leq l_i \leq n_i - 1$,: as primeiras n_s coordenadas têm $l_i = 0$, para $i \neq s$, e l_s variando de 0 a $n_s - 1$; as próximas n_s coordenadas têm $l_i = 0$, para $i \neq s, s-1$, $l_{s-1} = 1$ e l_s variando de 0 a $n_s - 1$;

Calculando idempotentes centrais primitivos

(Quoos & Veloso [11])

$KG \simeq K \oplus \ldots \oplus K$ (n cópias de K). Os idempotentes centrais primitivos de KG são as imagens inversas das n-uplas $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Escreva $G \simeq C_1 \times \ldots \times C_s$, com $C_i = \langle g_i \,;\, g_i^{n_i} = 1 \rangle$.

As n componentes da soma direta $K \oplus \ldots \oplus K$ serão indexadas por s-uplas $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_s)$, com $0 \leq l_i \leq n_i - 1$,: as primeiras n_s coordenadas têm $l_i = 0$, para $i \neq s$, e l_s variando de 0 a $n_s - 1$; as próximas n_s coordenadas têm $l_i = 0$, para $i \neq s, s-1$, $l_{s-1} = 1$ e l_s variando de 0 a $n_s - 1$; as próximas n_s coordenadas têm $l_i = 0$, para $i \neq s, s-1$, $l_{s-1} = 2$ e l_s variando de 0 a $n_s - 1$;

Calculando idempotentes centrais primitivos

(Quoos & Veloso [11])

$KG \simeq K \oplus \ldots \oplus K$ (n cópias de K). Os idempotentes centrais primitivos de KG são as imagens inversas das n-uplas $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Escreva $G \simeq C_1 \times \ldots \times C_s$, com $C_i = \langle g_i \,;\, g_i^{n_i} = 1 \rangle$.

As n componentes da soma direta $K \oplus \ldots \oplus K$ serão indexadas por s-uplas $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_s)$, com $0 \leq l_i \leq n_i - 1$,: as primeiras n_s coordenadas têm $l_i = 0$, para $i \neq s$, e l_s variando de 0 a $n_s - 1$; as próximas n_s coordenadas têm $l_i = 0$, para $i \neq s, s-1$, $l_{s-1} = 1$ e l_s variando de 0 a $n_s - 1$; as próximas n_s coordenadas têm $l_i = 0$, para $i \neq s, s-1$, $l_{s-1} = 2$ e l_s variando de 0 a $n_s - 1$; e assim por diante.

Calculando idempotentes centrais primitivos (cont.)

Defina $m := \text{mmc}(n_1, \ldots, n_s)$.

Calculando idempotentes centrais primitivos (cont.)

Defina $m := \mathrm{mmc}(n_1, \ldots, n_s)$. Denote por ζ_m uma raiz primitiva de 1 de ordem m em K, e, para $i = 1, \ldots, s$, por ζ_{n_i} uma raiz primitiva de 1 de ordem n_i em K.

Calculando idempotentes centrais primitivos (cont.)

Defina $m := \mathrm{mmc}(n_1, \ldots, n_s)$. Denote por ζ_m uma raiz primitiva de 1 de ordem m em K, e, para $i = 1, \ldots, s$, por ζ_{n_i} uma raiz primitiva de 1 de ordem n_i em K.

Dada uma s-tupla $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_s)$, com $0 \leq l_i \leq n_i - 1$, defina o polinômio $P_{\bar{l}} \in K(\zeta_m)[X_1, \ldots, X_s] = K[X_1, \ldots, X_s]$ como:

$$P_{\bar{l}} = \prod_{i=1}^{s} \prod_{\substack{k_i=0 \\ k_i \neq l_i}}^{n_i-1} (X_i - \zeta_{n_i}^{k_i}),$$

com ζ_m uma raiz primitiva de 1 de ordem m.

Calculando idempotentes centrais primitivos (cont.)

Defina $m := \mathrm{mmc}(n_1, \ldots, n_s)$. Denote por ζ_m uma raiz primitiva de 1 de ordem m em K, e, para $i = 1, \ldots, s$, por ζ_{n_i} uma raiz primitiva de 1 de ordem n_i em K.

Dada uma s-tupla $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_s)$, com $0 \leq l_i \leq n_i - 1$, defina o polinômio $P_{\bar{l}} \in K(\zeta_m)[X_1, \ldots, X_s] = K[X_1, \ldots, X_s]$ como:

$$P_{\bar{l}} = \prod_{i=1}^{s} \prod_{\substack{k_i=0 \\ k_i \neq l_i}}^{n_i-1} (X_i - \zeta_{n_i}^{k_i}),$$

com ζ_m uma raiz primitiva de 1 de ordem m.

Notar: $P_{\bar{l}}(\zeta_{n_1}^{k_1}, \ldots, \zeta_{n_s}^{k_s}) \neq 0 \iff \bar{k} = \bar{l}$.

Calculando idempotentes centrais primitivos (cont.)

Os idempotentes centrais primitivos de KG são os elementos:

$$e_{\bar{l}} := \frac{P_{\bar{l}}(g_1, \ldots, g_s)}{P_{\bar{l}}(\zeta_1^{l_1}, \ldots, \zeta_s^{l_s})},$$

com $0 \leq l_i \leq n_i - 1$, para $i = 1, \ldots, s$.

Calculando idempotentes centrais primitivos (cont.)

Os idempotentes centrais primitivos de KG são os elementos:

$$e_{\bar{l}} := \frac{P_{\bar{l}}(g_1, \ldots, g_s)}{P_{\bar{l}}(\zeta_1^{l_1}, \ldots, \zeta_s^{l_s})},$$

com $0 \leq l_i \leq n_i - 1$, para $i = 1, \ldots, s$.

Para todo idempotente central primitivo $e_{\bar{l}} \in KG$, temos $e_{\bar{l}}^*$ também é um idempotente central primitivo em KG

Calculando idempotentes centrais primitivos (cont.)

Os idempotentes centrais primitivos de KG são os elementos:

$$e_{\bar{l}} := \frac{P_{\bar{l}}(g_1, \ldots, g_s)}{P_{\bar{l}}(\zeta_1^{l_1}, \ldots, \zeta_s^{l_s})},$$

com $0 \leq l_i \leq n_i - 1$, para $i = 1, \ldots, s$.

Para todo idempotente central primitivo $e_{\bar{l}} \in KG$, temos $e_{\bar{l}}^*$ também é um idempotente central primitivo em KG (pois

$$e_{\bar{l}}^* = \frac{P_{\bar{l}}(g_1^{-1}, \ldots, g_s^{-1})}{P_{\bar{l}}(\zeta_1^{l_1}, \ldots, \zeta_s^{l_s})},$$

Calculando idempotentes centrais primitivos (cont.)

Os idempotentes centrais primitivos de KG são os elementos:

$$e_{\bar{l}} := \frac{P_{\bar{l}}(g_1, \ldots, g_s)}{P_{\bar{l}}(\zeta_1^{l_1}, \ldots, \zeta_s^{l_s})},$$

com $0 \leq l_i \leq n_i - 1$, para $i = 1, \ldots, s$.

Para todo idempotente central primitivo $e_{\bar{l}} \in KG$, temos $e_{\bar{l}}^*$ também é um idempotente central primitivo em KG (pois

$$e_{\bar{l}}^* = \frac{P_{\bar{l}}(g_1^{-1}, \ldots, g_s^{-1})}{P_{\bar{l}}(\zeta_1^{l_1}, \ldots, \zeta_s^{l_s})},$$

e cada g_i^{-1} também é um gerador de C_i).

Projeções em KG

Projeções em KG

Em geral: $e_{\bar{I}} \neq e_{\bar{I}}^*$.

Projeções em KG

Em geral: $e_{\bar{I}} \neq e_{\bar{I}}^*$.

Pergunta: Assim, KG não é em geral um anel $*$-limpo?

Obrigada pela atenção!

V. P. Camillo, D. Khurana, *A characterization of unit-regular rings*, Communications in Algebra **29** (2001), 2293 – 2295.

Y. Gao, J. Chen, Y. Li, *Some star-clean Group Rings*, Algebra Colloquium **22** (2015) 169–180 (to appear).

J. Han, W. K. Nicholson, *Extensions of clean rings*, Communications in Algebra **29** (2001), 2589–2595.

T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, New York, 2nd Edition, 2001.

Y. Li, M. M. Parmenter, P. Yuan, *On star-clean group rings*, Journal of Algebra and Its Applications **14** (2015) (to appear).

C. Li, Y. Zhou, *On strongly $*$-clean rings*, J. Algebra Appl. **10** (6) (2011) 1363–1370.

- F. J. Murray, J. von Neumann, *On Rings of Operators*, Annals of Mathematics, Second Series, **37** (1936), 116–229.
- W. K. Nicholson, *Lifting idempotents and exchange rings*, Transactions of the AMS **229** (1977), 269 – 278.
- W. K. Nicholson, Y. Zhou, *Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit*, Glasgow Mathematical Journal **46** (2004), 227 – 236.
- S. Perlis, G. Walker, *Abelian Group Algebras of Finite Order*, Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 420–426, 1950.
- L. Quoos; P. M. Veloso, *Primitive Central Idempotents of Nilpotent Group Algebras*, SCIENTIA Series A: Mathematical Series **16**, 87–93, 2008.

L. Vaš, *$*$-Clean rings; some clean and almost clean Baer $*$-rings and von Neumann algebras*, J. Algebra **324** (2010), 3388–3400.