Variedades Abelianas: Equações e Subvariedades (Parte 1)

Tiago Nunes Castilho

Novembro 2009

A Jacobiana de uma curva C definida sobre os complexos é o grupo quociente $J = H^0(\omega_C)^*/H^1(C, \mathbb{Z})$. Existem certas propriedades de C que podem ser obtidas a partir de J. Isto faz da Jacobiana objeto de inúmeros estudos na teoria de curvas algébricas. A propriedade que nos interessa é que em J existe simultaneamente uma estrutura de variedade projetiva e uma estrutura de grupo, fazendo portanto parte de uma classe muito especial de variedades algébricas, as *variedades abelianas*, que são definidas como sendo grupos algébricos projetivos. Topologicamente pode-se observar que J é um toro analítico, por esta razão toros são o ponto de partida no estudo da teoria de variedades abelianas complexas. Grupos de Lie compactos e conexos são analiticamente (não necessariamente algebricamente) isomorfos a toros complexos. Sendo assim, a maneira natural de estudar generalizações da noção de Jacobiana é estudar sobre quais condições é possível definir uma estrutura de variedade projetiva sobre toros. Em [1] Lefscthetz mostrou que se L é uma fibração linear positiva definida sobre o toro X então L^n é muito amplo para todo $n \geq 3$. Por um teorema devido a Chow, é conhecido que subvariedades analíticas fechadas em espaços projetivos são algébricas. Isto significa que a projetividade algébrica do toro depende da existência ou não de uma fibração que seja positiva definida. Uma vez fixado um tal mergulho $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ é possível descrever a variedade $\varphi(X)$ como o conjunto de zeros em comum de algum ideal homogêneo I de polinômios de $N + 1$ variáveis. A questão é: como descrever as relações que definem este ideal? Na série de trabalhos [3] , [5] Mumford forneceu certos métodos para descrever tais equações para variedades definidas sobre corpos mais arbitrários. Em [2] Lange-Birkenhake fornecem uma descrição do método de Mumford sobre os complexos. O ponto de partida está no fato de que é possível descrever φ como uma $N + 1$-úpla de funções holomorfas que satisfazem certas condições de quase periodicidade, são as chamadas *funções theta*. Logo pode-se considerar os polinômios de I como sendo relações de tais funções.

Neste seminário serão apresentados alguns dos métodos de Lange-Birkenhake descritos acima. Esta é a primeira de duas partes de um seminário que tem como objetivo apresentar um teorema de caracterização de recobrimentos duplos de curvas algébricas de Mumford via teoria de variedades de Prym.

Bibliografia

[1] Lefschetz, S. *On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to Abelian varieties.* , Manuscripta Math , Trans. AMS 22, 327-482 (1921)

[2] Lange,.H. e Birkenhake,Ch. *Complex Abelian Varieties*, Springer-Verlag , (2003).

[3] Mumford, D. *On the equations defining abelian varieties. I, II, III*, Invent. Math.1, 287 a 354 (1966);3, 75 a 135 (1967);3, 215 a 244 (1967)

[4] Mumford, D. *Abelian Varieties*, Osford. Univ. Press (1970)

[5] Mumford, D. *Varieties defined by quadrtic forms*, in Questions on Algebraic Varieties CIME,Roma 95-100(1970)

[6] Kempf, G. Appendix to: *Varieties defined by quadrtic forms*, by D. Mumford in Questions on Algebraic Varieties CIME,Roma 95-100(1970)