Sobre semigrupos de Arf, semigrupos esparsos e semigrupos de Weierstrass

Steve Vicentim
(IMECC – UNICAMP)

Orientador: Prof. Dr. Fernando Torres
(IMECC – UNICAMP)

Campinas – São Paulo

31 de Março de 2014

Um semigrupo numérico é um subconjunto $H \subseteq \mathbb{N}$, fechado para a adição de $\mathbb{N}$ e com complementar $\mathbb{N} \backslash H$ finito.

$$H = \{0 = n_0 < n_1 < n_2 < ...\}$$

$$\mathrm{Gap}(H) := \mathbb{N} \backslash H = \{\ell_1 < \ell_2 < ... < \ell_g\}$$

(1) Se $n_i + n_j - n_k \in H, \forall i \geq j \geq k \geq 0$, então H é dito semigrupo de Arf;

(2) Se $\ell_{i+1} - \ell_i \leq 2, i = 1, ..., g-1$, então H é dito semigrupo esparso;

(3) Se existem uma curva $\mathcal{X}$ e um ponto $P \in \mathcal{X}$ tais que $H = H(P)$, então H é dito um semigrupo Weierstrass (onde $H(P) = \{n \in \mathbb{N}; \exists f \in k(\mathcal{X})$ tal que $(f)_\infty = nP\})$.

Tipos de semigrupos

Se H é de Arf, então H é esparso.

Mas nem todo semigrupo esparso é de Arf:

Exemplo

Seja H um semigrupo com gênero $g \geq 7$, dado por

$$H = \{0, g-2, g, g+3, g+4, \ldots\}.$$

Então H é esparso, mas não é semigrupo de Arf, caso contrário $g+2 \in H$.

Nem todo semigrupo de Weierstrass é esparso:

Teorema

(Komeda-Ohbuchi)
Seja H' é um semigrupo de Weierstrass com gênero g', número de Frobenius $\ell_{g'}$, condutor c' e multiplicidade n_1'. Seja n um número ímpar tal que $n \geq 2c' - 1$ e $n \neq 2n_1' - 1$, então $H := 2H' + n\mathbb{N}$ é um semigrupo de Weierstrass.

Teorema

Seja $H' = t\mathbb{N} + H_s$, com $1 < t < s$, $H_s := \{0, s+1, s+2, ...\}$ e c' o condutor de H. Seja $n \geq 2c' - 1$, então $H := 2H' + n\mathbb{N}$ não é esparso.

Teorema

Seja H um semigrupo esparso com gênero $g > 0$, $\ell_g = 2g - k$ e $m := n_1 - 1$, então:

1. $\ell_i \geq 2i - k, \forall i = 1, ..., g$ *e* $m \leq k$;
2. *Se* $\ell_i = 2i - k$, *então* $\ell_j = 2j - k, \forall j = i, ..., g$;
3. *Se* $g \geq 2k - 1$, *então* $\ell_i = 2i - k, \forall i = 2k - 2, ..., g$.

Lema

Seja H um semigrupo esparso de gênero $g = 2k + j, j \geq 0$, e número de Frobenius $\ell_g = 2g - k$. Então existe um semigrupo esparso $\tilde{H}$ de gênero $\tilde{g} = 2k - 1$ e número de Frobenius $\ell_{\tilde{g}} = 2\tilde{g} - k = 3k - 2$, tal que H é um subsemigrupo de $\tilde{H}$.

A paridade do número de Frobenius e da multiplicidade de um semigrupo numérico interfere fortemente na estrutura do semigrupo.

Semigrupos esparsos com número de Frobenius par

Teorema

(Munuera-Torres-Villanueva)
Seja H um semigrupo esparso com gênero g e $\ell_g = 2g - 2r$ $(k = 2r)$. Se $g \geq 4r - 1$, então $g \leq 6r - n_1$. Em particular, a família de semigrupos $\mathcal{H}_r = \bigcup_{g \geq 0} \mathcal{H}_{g,r}$, onde $\mathcal{H}_{g,r} := \{H : H$ é um semigrupo esparso de gênero g e $\ell_g = 2g - 2r\}$, é finita.

Teorema

(Contiero-Moreira-Veloso)
Se H é um semigrupo esparso com gênero g e número de Frobenius $\ell_g = 2g - 2r$. Então $g \leq 4r - 1$.

Semigrupos esparsos com número de Frobenius ímpar

Teorema

(Contiero-Moreira-Veloso)
Seja H um semigrupo esparso de gênero g e número de Frobenius $\ell_g = 2g - (2r+1)$. Então $g \leq 4r+1$, ou todas as não lacunas menores que ℓ_g são pares.

Semigrupos esparsos versus semigrupo de Weierstrass

Corolário

Seja H um semigrupo esparso limite de gênero g. Se o número de Frobenius ℓ_g é par, então H é um semigrupo de Weierstrass. Se ℓ_g é ímpar, n_1 é ímpar e $6r-2$ é lacuna, então H é Weierstrass.

$$H = 3\mathbb{N} + H_{6r-2} \text{ (número de Frobenius par)}$$

$$H = 3\mathbb{N} + H_{6r+1} \text{ (número de Frobenius ímpar, } n_1 \text{ ímpar e } 6r-2 \text{ é lacuna)}$$

Teorema

Seja H' um semigrupo numérico de gênero r. Considere $H := 2H' \cup H_{6r+1}$. Então H é um semigrupo esparso limite com número de Frobenius ímpar e com multiplicidade par. Reciprocamente, todo semigrupo satisfazendo estass hipóteses, surge desta forma.

Seja H um semigrupo espaso com número de Frobenius ímpar e $g > 4r + 1$. Então H é obtido da seguinte forma: Tome H' um semigrupo numérico de gênero r, e defina $H := 2H' \cup H_{2g-2r-1}$. Temos H é semigrupo de Arf se, e somente se, H' é semigrupo de Arf.

Referências

- Munuera, Carlos and Torres, Fernando and Villanueva, Juan Elmer *Sparse Numerical Semigroups*. Lecture Notes in Computer Science, AAECC, 5527, Pág. 23-31, Springer (2009).

- Contiero, A. and Moreira, C.G.T.A. and Veloso, P.M. *On the structure of numerical sparse semigroups*. arXiv: 1308.5844v1, No prelo (2013).

- Komeda, Jiryo and Ohbuchi, Akira. *On double coverings of a pointed non-singular curve with any Weierstrass semigroup*. Tsukuba J. Math. 31, Pág. 205-215 (2007).

- Torres, Fernando. *Weierstrass points and double coverings of curves. With application: symmetric numerical semigroups which cannot be realized as Weierstrass semigroups*. Manuscripta Math. 83, Pág. 39-58 (1994).

Referências

- Campillo, A. and Farran, J.I. and Munuera, C. *On the parameters of algebraic-geometry codes related to Arf semigroups*. Information Theory, IEEE Transactions on, 46, 7, Pág. 2634-2638 (2000).
- Rosales, J.C. and García-Sánchez, P.A. and García-García, J.I. and Branco, M.B. *Arf numerical semigroups*. Journal of Algebra, 276, 1, Elsevier (2004).
- Arf, C. *Une Interprétation Algébrique de la suíte dês ordres de Multiplicité d'une Branche Algébrique*. Proc. London Math. Soc., 50, 2, Pág. 256-287 (1949).
- Oliveira, G. *Weierstrass semigroups and the canonical ideal of non-trigonal curves*. Manuscripta Math., 71, Pág. 431-450 (1991).

Referências

Torres, F. *On certain N-sheeted coverings of curves and numerical semigroups which cannot be realized as Weierstrass semigroups*. Comm. Algebra, 23, 11, Pág. 4211-4228 (1995).

Agradecimentos

Obrigado pela atenção.