Semigrupos numéricos esparsos: estrutura e cotas

Paula Murgel Veloso

Universidade Federal Fluminense, Departamento de Análise, Niterói - RJ
(colaboração com Prof. André L. Contiero – UFAL, & Carlos Gustavo T. A. Moreira – IMPA)

31 de março de 2014

Definition

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo numérico de gênero* g se

Definition

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo numérico de gênero* g se

(1) $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{N}$;

Definition

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo numérico de gênero* g se

(1) $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{N}$;

(2) $0 \in \mathcal{H}$;

Definition

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo numérico de gênero* g se

(1) $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{N}$;

(2) $0 \in \mathcal{H}$;

(3) $\mathcal{H}$ semigrupo (aditivo);

Definition

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo numérico de gênero g* se

(1) $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{N}$;

(2) $0 \in \mathcal{H}$;

(3) $\mathcal{H}$ semigrupo (aditivo);

(4) $\#(\mathbb{N} \setminus \mathcal{H}) = g$.

Definition

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo numérico de gênero* g se

(1) $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{N}$;

(2) $0 \in \mathcal{H}$;

(3) $\mathcal{H}$ semigrupo (aditivo);

(4) $\#(\mathbb{N} \setminus \mathcal{H}) = g$.

(4) significa, equivalentemente: o mdc entre os geradores de $\mathcal{H}$ é 1.

Notação

$\mathcal{H} = \{0 = n_0 < n_1 < \ldots\}$ (não lacunas)

Notação

$\mathcal{H} = \{0 = n_0 < n_1 < \ldots\}$ (não lacunas)

$\mathrm{Gaps}(\mathcal{H}) := \mathbb{N} \setminus \mathcal{H} = \{\ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_g\}$ (lacunas)

Notação

$\mathcal{H} = \{0 = n_0 < n_1 < \ldots\}$ (não lacunas)

$\mathrm{Gaps}(\mathcal{H}) := \mathbb{N} \setminus \mathcal{H} = \{\ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_g\}$ (lacunas)

multiplicidade de $\mathcal{H}$: n_1 (o menor elemento não nulo do semigrupo)

Notação

$\mathcal{H} = \{0 = n_0 < n_1 < \ldots\}$ (não lacunas)

$\mathrm{Gaps}(\mathcal{H}) := \mathbb{N} \setminus \mathcal{H} = \{\ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_g\}$ (lacunas)

multiplicidade de $\mathcal{H}$: n_1 (o menor elemento não nulo do semigrupo)

número de Frobenius de $\mathcal{H}$: ℓ_g (a maior lacuna)

Notação

$\mathcal{H} = \{0 = n_0 < n_1 < \ldots\}$ (não lacunas)

$\mathrm{Gaps}(\mathcal{H}) := \mathbb{N} \setminus \mathcal{H} = \{\ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_g\}$ (lacunas)

multiplicidade de $\mathcal{H}$: n_1 (o menor elemento não nulo do semigrupo)

número de Frobenius de $\mathcal{H}$: ℓ_g (a maior lacuna)

condutor de $\mathcal{H}$: o menor c tal que $c + n \in \mathcal{H}$, para todos $n \in \mathbb{N}$
$c = \ell_g + 1 = n_{c-g}$

Notação

$\mathcal{H} = \{0 = n_0 < n_1 < \ldots\}$ (não lacunas)

$\mathrm{Gaps}(\mathcal{H}) := \mathbb{N} \setminus \mathcal{H} = \{\ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_g\}$ (lacunas)

multiplicidade de $\mathcal{H}$: n_1 (o menor elemento não nulo do semigrupo)

número de Frobenius de $\mathcal{H}$: ℓ_g (a maior lacuna)

condutor de $\mathcal{H}$: o menor c tal que $c + n \in \mathcal{H}$, para todos $n \in \mathbb{N}$
$c = \ell_g + 1 = n_{c-g}$

Fato: $\ell_g \leq 2g - 1$.
Defina: $K := 2g - \ell_g \geq 1$.

Exemplo

$\mathcal{X}$ curva algébrica (projetiva, não singular, irredutível, definida sobre um corpo algebricamente fechado) de gênero g,

Exemplo

$\mathcal{X}$ curva algébrica (projetiva, não singular, irredutível, definida sobre um corpo algebricamente fechado) de gênero g, $P \in \mathcal{X}$.

Exemplo

$\mathcal{X}$ curva algébrica (projetiva, não singular, irredutível, definida sobre um corpo algebricamente fechado) de gênero g, $P \in \mathcal{X}$.

semigrupo de Weierstrass de P em $\mathcal{X}$:

Exemplo

$\mathcal{X}$ curva algébrica (projetiva, não singular, irredutível, definida sobre um corpo algebricamente fechado) de gênero g, $P \in \mathcal{X}$.

semigrupo de Weierstrass de P em $\mathcal{X}$:
$\mathcal{H}(P) = \{k \in \mathbb{N}$; $\exists$ função em $\mathcal{X}$ com um pólo de ordem k em P e nenhum outro pólo $\}$

Exemplo

$\mathcal{X}$ curva algébrica (projetiva, não singular, irredutível, definida sobre um corpo algebricamente fechado) de gênero g, $P \in \mathcal{X}$.

semigrupo de Weierstrass de P em $\mathcal{X}$:
$\mathcal{H}(P) = \{k \in \mathbb{N}\ ;\ \exists$ função em $\mathcal{X}$ com um pólo de ordem k em P e nenhum outro pólo $\}$

lacuna de Weierstrass para P: $k \in \mathbb{N}$ tal que não existe função em $\mathcal{X}$ com exatamente um pólo de ordem k em P.
$\mathrm{Gaps}(\mathcal{H}(P)) := \{$lacuna de Weierstrass para $P\}$

Exemplo

$\mathcal{X}$ curva algébrica (projetiva, não singular, irredutível, definida sobre um corpo algebricamente fechado) de gênero g, $P \in \mathcal{X}$.

semigrupo de Weierstrass de P em $\mathcal{X}$:
$\mathcal{H}(P) = \{k \in \mathbb{N}$; $\exists$ função em $\mathcal{X}$ com um pólo de ordem k em P e nenhum outro pólo $\}$

lacuna de Weierstrass para P: $k \in \mathbb{N}$ tal que não existe função em $\mathcal{X}$ com exatamente um pólo de ordem k em P.
$\mathrm{Gaps}(\mathcal{H}(P)) := \{$lacuna de Weierstrass para $P\}$

Da definição: $\mathcal{H}(P) = \mathbb{N} \setminus \mathrm{Gaps}(\mathcal{H}(P))$.

Exemplo

$\mathcal{X}$ curva algébrica (projetiva, não singular, irredutível, definida sobre um corpo algebricamente fechado) de gênero g, $P \in \mathcal{X}$.

semigrupo de Weierstrass de P em $\mathcal{X}$:
$\mathcal{H}(P) = \{k \in \mathbb{N}$; $\exists$ função em $\mathcal{X}$ com um pólo de ordem k em P e nenhum outro pólo $\}$

lacuna de Weierstrass para P: $k \in \mathbb{N}$ tal que não existe função em $\mathcal{X}$ com exatamente um pólo de ordem k em P.
$\mathrm{Gaps}(\mathcal{H}(P)) := \{$lacuna de Weierstrass para $P\}$

Da definição: $\mathcal{H}(P) = \mathbb{N} \setminus \mathrm{Gaps}(\mathcal{H}(P))$.

Teorema das lacunas de Weierstrass: $\#\mathrm{Gaps}(\mathcal{H}(P)) = g$

Observações

Fatos banais, mas muito úteis

1. Para todo $\ell_i \in \mathrm{Gaps}(\mathcal{H})$, existe uma *função de reflexão* bem definida

$$R_i : \mathcal{H} \cap \{0, 1, 2, \ldots, \ell_i\} \longrightarrow \mathrm{Gaps}(\mathcal{H});\ n \mapsto \ell_i - n.$$

Observações

Fatos banais, mas muito úteis

1. Para todo $\ell_i \in \mathrm{Gaps}(\mathcal{H})$, existe uma *função de reflexão* bem definida

$$R_i : \mathcal{H} \cap \{0, 1, 2, \ldots, \ell_i\} \longrightarrow \mathrm{Gaps}(\mathcal{H});\ n \mapsto \ell_i - n.$$

2. Para todo $\ell_i \in \mathrm{Gaps}(\mathcal{H})$, se $d \mid \ell_i$, então $d \in \mathrm{Gaps}(\mathcal{H})$.

Observações

Fatos banais, mas muito úteis

1. Para todo $\ell_i \in \mathrm{Gaps}(\mathcal{H})$, existe uma *função de reflexão* bem definida

$$R_i : \mathcal{H} \cap \{0, 1, 2, \ldots, \ell_i\} \longrightarrow \mathrm{Gaps}(\mathcal{H});\ n \mapsto \ell_i - n.$$

2. Para todo $\ell_i \in \mathrm{Gaps}(\mathcal{H})$, se $d \mid \ell_i$, então $d \in \mathrm{Gaps}(\mathcal{H})$.

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo simétrico* se $\ell_g = 2g - 1$.
$\mathcal{H}$ é um *semigrupo quase-simétrico* se $\ell_g = 2g - 2$.

Observações

Fatos banais, mas muito úteis

1. Para todo $\ell_i \in \mathrm{Gaps}(\mathcal{H})$, existe uma *função de reflexão* bem definida

$$R_i : \mathcal{H} \cap \{0, 1, 2, \ldots, \ell_i\} \longrightarrow \mathrm{Gaps}(\mathcal{H});\ n \mapsto \ell_i - n.$$

2. Para todo $\ell_i \in \mathrm{Gaps}(\mathcal{H})$, se $d \mid \ell_i$, então $d \in \mathrm{Gaps}(\mathcal{H})$.

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo simétrico* se $\ell_g = 2g - 1$.
$\mathcal{H}$ é um *semigrupo quase-simétrico* se $\ell_g = 2g - 2$.

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo γ-hiperelítico* se tem exatamente γ lacunas pares.
$\mathcal{H}$ é um *semigrupo hiperelítico* se $2 \in \mathcal{H}$.

Definição

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo de Arf* se, para todos $n_i, n_j, n_k \in \mathcal{H}$, com $n_i \geq n_j \geq n_k$, temos:

$$n_i + n_j - n_k \in \mathcal{H}.$$

Definição

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo de Arf* se, para todos $n_i, n_j, n_k \in \mathcal{H}$, com $n_i \geq n_j \geq n_k$, temos:

$$n_i + n_j - n_k \in \mathcal{H}.$$

Há diversas caracterizações alternativas ([Barucci, Dobbs, Fontana (1997)] apresentam 15 condições equivalentes!).

Definição

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo de Arf* se, para todos $n_i, n_j, n_k \in \mathcal{H}$, com $n_i \geq n_j \geq n_k$, temos:

$$n_i + n_j - n_k \in \mathcal{H}.$$

Há diversas caracterizações alternativas ([Barucci, Dobbs, Fontana (1997)] apresentam 15 condições equivalentes!).

Teorema [C. Campillo, J. I. Farrán, J. Munuera (2000)]

$\mathcal{H}$ é um semigrupo de Arf $\Leftrightarrow$ para todos $n_i, n_j \in \mathcal{H}$, com $n_i \geq n_j$, temos:

$$2n_i - n_j \in \mathcal{H}.$$

Propriedade

As não lacunas em um semigrupo de Arf satisfazem a uma condição de espaçamento mínimo

Propriedade

As não lacunas em um semigrupo de Arf satisfazem a uma condição de espaçamento mínimo (assim, as lacunas satifazem a uma condição de espaçamento máximo).

Propriedade

As não lacunas em um semigrupo de Arf satisfazem a uma condição de espaçamento mínimo (assim, as lacunas satifazem a uma condição de espaçamento máximo).

Corolário [J. Munuera, F. Torres, J. Villanueva (2009)]

Se $\mathcal{H}$ é um semigrupo de Arf , então:

$$\ell_i - \ell_{i-1} \leq 2, \; i = 2, \ldots, g.$$

Propriedade

As não lacunas em um semigrupo de Arf satisfazem a uma condição de espaçamento mínimo (assim, as lacunas satifazem a uma condição de espaçamento máximo).

Corolário [J. Munuera, F. Torres, J. Villanueva (2009)]

Se $\mathcal{H}$ é um semigrupo de Arf , então:

$$\ell_i - \ell_{i-1} \leq 2, \; i = 2, \ldots, g.$$

(equivalentemente, $n_{i+1} - n_i \geq 2, \; i = 1, \ldots, c - g$).

Definição

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo esparso* se

$$\ell_i - \ell_{i-1} \leq 2, \ i = 2, \ldots, g$$

(ou, equivalentemente: $n_{i+1} - n_i \geq 2, \ i = 1, \ldots, c - g$).

Definição

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo esparso* se

$$\ell_i - \ell_{i-1} \leq 2, \ i = 2, \ldots, g$$

(ou, equivalentemente: $n_{i+1} - n_i \geq 2, \ i = 1, \ldots, c - g$).

Exemplo

$g \geq 5$,
$\mathcal{H} = \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, g-3, g-1, g+1, g+2\} =$
$\{0, g-2, g, g+3, g+4, \ldots\}$

Definição

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo esparso* se

$$\ell_i - \ell_{i-1} \leq 2, \; i = 2, \ldots, g$$

(ou, equivalentemente: $n_{i+1} - n_i \geq 2, \; i = 1, \ldots, c - g$).

Exemplo

$g \geq 5$,
$\mathcal{H} = \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, g-3, g-1, g+1, g+2\} =$
$\{0, g-2, g, g+3, g+4, \ldots\}$
$\mathcal{H}$ é um semigrupo esparso,

Definição

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo esparso* se

$$\ell_i - \ell_{i-1} \leq 2, \; i = 2, \ldots, g$$

(ou, equivalentemente: $n_{i+1} - n_i \geq 2, \; i = 1, \ldots, c - g$).

Exemplo

$g \geq 5$,
$\mathcal{H} = \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, g-3, g-1, g+1, g+2\} =$
$\{0, g-2, g, g+3, g+4, \ldots\}$
$\mathcal{H}$ é um semigrupo esparso, mas não um semigrupo de Arf:

Definição

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo esparso* se

$$\ell_i - \ell_{i-1} \leq 2, \ i = 2, \ldots, g$$

(ou, equivalentemente: $n_{i+1} - n_i \geq 2, \ i = 1, \ldots, c - g$).

Exemplo

$g \geq 5$,
$\mathcal{H} = \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, g-3, g-1, g+1, g+2\} =$
$\{0, g-2, g, g+3, g+4, \ldots\}$
$\mathcal{H}$ é um semigrupo esparso, mas não um semigrupo de Arf:
$2g - (g-2) = g + 2 \notin \mathcal{H}$.

Outros exemplos

$\mathcal{H}$ é um *semigrupo esparso ordinário* se $\mathcal{H}_g = \{0, g+1, g+2, \dots\}$.
$\mathcal{H}$ é um *semigrupo esparso hiperordinário* se $\mathcal{H} = a\mathbb{N} + \mathcal{H}_g$, $0 < a < g$.

Saltos simples e duplos

Dizemos que um par (ℓ_i, ℓ_{i+1}) é um *salto* em um semigrupo esparso $\mathcal{H}$ se ℓ_i, ℓ_{i+1} são lacunas subsequentes de $\mathcal{H}$.

Saltos simples e duplos

Dizemos que um par (ℓ_i, ℓ_{i+1}) é um *salto* em um semigrupo esparso $\mathcal{H}$ se ℓ_i, ℓ_{i+1} são lacunas subsequentes de $\mathcal{H}$.

Um salto é *simples* ou *duplo* se $\ell_{i+1} - \ell_i = 1$ ou $\ell_{i+1} - \ell_i = 2$, respectivamente.

Saltos simples e duplos

Dizemos que um par (ℓ_i, ℓ_{i+1}) é um *salto* em um semigrupo esparso $\mathcal{H}$ se ℓ_i, ℓ_{i+1} são lacunas subsequentes de $\mathcal{H}$.

Um salto é *simples* ou *duplo* se $\ell_{i+1} - \ell_i = 1$ ou $\ell_{i+1} - \ell_i = 2$, respectivamente.

Conjuntos de saltos

- $\mathcal{D} := \{(\ell_i, \ell_{i+1}) \; ; \; \ell_{i+1} - \ell_i = 2\}$ (saltos duplos),
- $D := \#\mathcal{D}$,

Saltos simples e duplos

Dizemos que um par (ℓ_i, ℓ_{i+1}) é um *salto* em um semigrupo esparso $\mathcal{H}$ se ℓ_i, ℓ_{i+1} são lacunas subsequentes de $\mathcal{H}$.

Um salto é *simples* ou *duplo* se $\ell_{i+1} - \ell_i = 1$ ou $\ell_{i+1} - \ell_i = 2$, respectivamente.

Conjuntos de saltos

- $\mathcal{D} := \{(\ell_i, \ell_{i+1})\ ;\ \ell_{i+1} - \ell_i = 2\}$ (saltos duplos),
- $D := \#\mathcal{D}$,
- $\mathcal{S} := \{(\ell_i, \ell_{i+1})\ ;\ \ell_{i+1} - \ell_i = 1\}$ (saltos simples),
- $S := \#\mathcal{S}$.

Contando saltos

Lembre-se: $K = 2g - \ell_g \geq 1.$

Contando saltos

Lembre-se: $K = 2g - \ell_g \geq 1$.

Proposição [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g. Então:

1. $D + S = g - 1$.

Contando saltos

Lembre-se: $K = 2g - \ell_g \geq 1$.

Proposição [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g. Então:

1. $D + S = g - 1$.
2. $D = g - K$.

Contando saltos

Lembre-se: $K = 2g - \ell_g \geq 1$.

Proposição [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g. Então:

1. $D + S = g - 1$.
2. $D = g - K$.
3. $S = K - 1$.

Espaçamento das últimas lacunas

Proposição [J. Munuera, F. Torres, J. Villanueva (2009)]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g com $\ell_g = 2g - K$.

Espaçamento das últimas lacunas

Proposição [J. Munuera, F. Torres, J. Villanueva (2009)]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g com $\ell_g = 2g - K$.
Se $g \geq 2K - 1$, então

$$\ell_{i+1} - \ell_i = 2,$$

para todo $i = 2K - 2, \ldots, g - 1$.

Espaçamento das últimas lacunas

Proposição [J. Munuera, F. Torres, J. Villanueva (2009)]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g com $\ell_g = 2g - K$.
Se $g \geq 2K - 1$, então

$$\ell_{i+1} - \ell_i = 2,$$

para todo $i = 2K - 2, \ldots, g - 1$.

Pergunta natural

Existem semigrupos esparsos de gênero g com $\ell_g = 2g - K$ e $g \geq 2K - 1$?

Algumas consequências da contagem de saltos

Corolário [Contiero, Moreira, Veloso]

Se $\mathcal{H}$ semigrupo esparso simétrico de gênero g, então $\mathcal{H}$ é o semigrupo hiperelítico

$$\mathcal{H} = \langle 2, 2g+1 \rangle.$$

Algumas consequências da contagem de saltos

Corolário [Contiero, Moreira, Veloso]

Se $\mathcal{H}$ semigrupo esparso simétrico de gênero g, então $\mathcal{H}$ é o semigrupo hiperelítico

$$\mathcal{H} = \langle 2, 2g+1 \rangle.$$

Corolário [Contiero, Moreira, Veloso]

Se $\mathcal{H}$ semigrupo esparso quase-simétrico, então

$$\text{ou } \mathcal{H} = \langle 3, 4, 5 \rangle, \ \text{ ou } \mathcal{H} = \langle 3, 5, 7 \rangle.$$

Algumas consequências da contagem de saltos (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g \geq 3$ e $\ell_g = 2g - 3$.

Algumas consequências da contagem de saltos (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g \geq 3$ e $\ell_g = 2g - 3$. Então $\mathcal{H}$ é um dos seguintes semigrupos:

Algumas consequências da contagem de saltos (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g \geq 3$ e $\ell_g = 2g - 3$. Então $\mathcal{H}$ é um dos seguintes semigrupos:

1. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_5$, $\mathcal{H}$ é 2-hiperelítico;
2. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_7$, $\mathcal{H}$ é 2-hiperelítico;
3. $\mathcal{H} = 2(\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \mathcal{H}_{2g-2}$, $\mathcal{H}$ é 1-hiperelítico.

Algumas consequências da contagem de saltos (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g \geq 3$ e $\ell_g = 2g - 3$. Então $\mathcal{H}$ é um dos seguintes semigrupos:

1. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_5$, $\mathcal{H}$ é 2-hiperelítico;
2. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_7$, $\mathcal{H}$ é 2-hiperelítico;
3. $\mathcal{H} = 2(\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \mathcal{H}_{2g-2}$, $\mathcal{H}$ é 1-hiperelítico.

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo de gênero $g \geq 6$ e $\ell_g = 2g - 3$.

Algumas consequências da contagem de saltos (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g \geq 3$ e $\ell_g = 2g - 3$. Então $\mathcal{H}$ é um dos seguintes semigrupos:

1. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_5$, $\mathcal{H}$ é 2-hiperelítico;
2. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_7$, $\mathcal{H}$ é 2-hiperelítico;
3. $\mathcal{H} = 2(\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \mathcal{H}_{2g-2}$, $\mathcal{H}$ é 1-hiperelítico.

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo de gênero $g \geq 6$ e $\ell_g = 2g - 3$. Então são equivalentes:

Algumas consequências da contagem de saltos (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g \geq 3$ e $\ell_g = 2g - 3$. Então $\mathcal{H}$ é um dos seguintes semigrupos:

1. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_5$, $\mathcal{H}$ é 2-hiperelítico;
2. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_7$, $\mathcal{H}$ é 2-hiperelítico;
3. $\mathcal{H} = 2(\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \mathcal{H}_{2g-2}$, $\mathcal{H}$ é 1-hiperelítico.

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo de gênero $g \geq 6$ e $\ell_g = 2g - 3$. Então são equivalentes:

a. $\mathcal{H}$ é esparso;
b. $\mathcal{H}$ is 1-hiperelítico.

Algumas consequências da contagem de saltos (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g \geq 4$ e $\ell_g = 2g - 4$.

Algumas consequências da contagem de saltos (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g \geq 4$ e $\ell_g = 2g - 4$. Então $\mathcal{H}$ é um dos seguintes semigrupos:

Algumas consequências da contagem de saltos (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g \geq 4$ e $\ell_g = 2g - 4$. Então $\mathcal{H}$ é um dos seguintes semigrupos:

1. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_8$, $\mathcal{H}$ é 3-hiperelítico;
2. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_{10}$, $\mathcal{H}$ é 4-hiperelítico;
3. $\mathcal{H} = 4\mathbb{N} + \mathcal{H}_6$, $\mathcal{H}$ é 2-hiperelítico;
4. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_4$, $\mathcal{H}$ é 2-hiperelítico;
5. $\mathcal{H} = 5\mathbb{N} + \mathcal{H}_6$, $\mathcal{H}$ é 3-hiperelítico;
6. $\mathcal{H} = \{0, 5, 7\} \cup \mathcal{H}_8$, $\mathcal{H}$ é 4-hiperelítico.

Algumas consequências da contagem de saltos (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g \geq 5$ e $\ell_g = 2g - 5$.

Algumas consequências da contagem de saltos (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g \geq 5$ e $\ell_g = 2g - 5$. Então $\mathcal{H}$ é um dos seguintes semigrupos:

Algumas consequências da contagem de saltos (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g \geq 5$ e $\ell_g = 2g - 5$. Então $\mathcal{H}$ é um dos seguintes semigrupos:

1. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_{11}$, $\mathcal{H}$ é 4-hiperelítico;
2. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_{13}$, $\mathcal{H}$ é 4-hiperelítico;
3. $\mathcal{H} = 2(\mathbb{N} \setminus \{1,3\}) \cup \mathcal{H}_{2g-4}$, $g \geq 6$, $\mathcal{H}$ é 2-hiperelítico;
4. $\mathcal{H} = \{0,5,7\} \cup \mathcal{H}_9$, $\mathcal{H}$ é 4-hiperelítico;
5. $\mathcal{H} = \{0,5,7,10\} \cup \mathcal{H}_{11}$, $\mathcal{H}$ é 4-hiperelítico;
6. $\mathcal{H} = \{0,5,7,10,12\} \cup \mathcal{H}_{13}$, $\mathcal{H}$ é 4-hiperelítico;
7. $\mathcal{H} = \{0,5\} \cup \mathcal{H}_7$, $\mathcal{H}$ é 3-hiperelítico;
8. $\mathcal{H} = \{0,5,8\} \cup \mathcal{H}_9$, $\mathcal{H}$ é 3-hiperelítico;
9. $\mathcal{H} = \{0,5,8,10\} \cup \mathcal{H}_{11}$, $\mathcal{H}$ é 4-hiperelítico;

Definição

Um *semigrupo esparso limite* $\mathcal{H}$ é um semigrupo esparso de gênero $g = 2K - 1$ e $\ell_g = 2g - K$.

Definição

Um *semigrupo esparso limite* $\mathcal{H}$ é um semigrupo esparso de gênero $g = 2K - 1$ e $\ell_g = 2g - K$.

Note que um semigrupo esparso limite tem tantos saltos simples quanto duplos, i.e., $S = D$.

Definição

Um *semigrupo esparso limite* $\mathcal{H}$ é um semigrupo esparso de gênero $g = 2K - 1$ e $\ell_g = 2g - K$.

Note que um semigrupo esparso limite tem tantos saltos simples quanto duplos, i.e., $S = D$.

Lema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g = 2K + j$, $j \geq 0$,com $\ell_g = 2g - K$.

Definição

Um *semigrupo esparso limite* $\mathcal{H}$ é um semigrupo esparso de gênero $g = 2K - 1$ e $\ell_g = 2g - K$.

Note que um semigrupo esparso limite tem tantos saltos simples quanto duplos, i.e., $S = D$.

Lema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero $g = 2K + j$, $j \geq 0$,com $\ell_g = 2g - K$.
Então existe um semigrupo esparso limite $\widetilde{\mathcal{H}}$ de gênero $\widetilde{g} = 2K - 1$ e $\ell_{\widetilde{g}} = 2\widetilde{g} - K = 3K - 2$ tal que $\mathcal{H}$ é um subsemigrupo de $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Estrutura de semigrupos esparsos limite com ℓ_g par

Denote: $K = 2k$.

Estrutura de semigrupos esparsos limite com ℓ_g par

Denote: $K = 2k$.

Lema [Contiero, Moreira, Veloso]

Se $\mathcal{H}$ é um semigrupo esparso limite de gênero g e ℓ_g par, então $4 \notin \mathcal{H}$.

Estrutura de semigrupos esparsos limite com ℓ_g par

Denote: $K = 2k$.

Lema [Contiero, Moreira, Veloso]

Se $\mathcal{H}$ é um semigrupo esparso limite de gênero g e ℓ_g par, então $4 \notin \mathcal{H}$.

Lema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k - 1$ com $\ell_g = 2g - 2k = 6k - 2$ par.

Estrutura de semigrupos esparsos limite com ℓ_g par

Denote: $K = 2k$.

Lema [Contiero, Moreira, Veloso]

Se $\mathcal{H}$ é um semigrupo esparso limite de gênero g e ℓ_g par, então $4 \notin \mathcal{H}$.

Lema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k - 1$ com $\ell_g = 2g - 2k = 6k - 2$ par. Então:

$$3 \in \mathcal{H} \Leftrightarrow 6k - 5 \notin \mathcal{H}.$$

Estrutura de semigrupos esparsos limite com ℓ_g par (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k - 1$ com $\ell_g = 2g - 2k$ par.

Estrutura de semigrupos esparsos limite com ℓ_g par (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k - 1$ com $\ell_g = 2g - 2k$ par.
Então $3 \in \mathcal{H}$,

Estrutura de semigrupos esparsos limite com ℓ_g par (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k - 1$ com $\ell_g = 2g - 2k$ par.
Então $3 \in \mathcal{H}$, i.e.,

$$\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_{6r-2} = \langle 3, 6k - 1, 6k + 1 \rangle.$$

Estrutura de semigrupos esparsos limite com ℓ_g par (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k - 1$ com $\ell_g = 2g - 2k$ par.
Então $3 \in \mathcal{H}$, i.e.,

$$\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_{6r-2} = \langle 3, 6k-1, 6k+1 \rangle.$$

Corolário [Contiero, Moreira, Veloso]

Se $\mathcal{H}$ é um semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k - 1$ e $\ell_g = 2g - 2k$ par,

Estrutura de semigrupos esparsos limite com ℓ_g par (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k - 1$ com $\ell_g = 2g - 2k$ par.
Então $3 \in \mathcal{H}$, i.e.,

$$\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_{6r-2} = \langle 3, 6k-1, 6k+1 \rangle.$$

Corolário [Contiero, Moreira, Veloso]

Se $\mathcal{H}$ é um semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k - 1$ e $\ell_g = 2g - 2k$ par,
então $\mathcal{H}$ é um semigroup de Arf.

Estrutura de semigrupos esparsos limite com ℓ_g par (cont.)

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k - 1$ com $\ell_g = 2g - 2k$ par.
Então $3 \in \mathcal{H}$, i.e.,

$$\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_{6r-2} = \langle 3, 6k - 1, 6k + 1 \rangle.$$

Corolário [Contiero, Moreira, Veloso]

Se $\mathcal{H}$ é um semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k - 1$ e $\ell_g = 2g - 2k$ par,
então $\mathcal{H}$ é um semigroup de Arf. Além disso, $\mathcal{H}$ é um semigrupo de Weierstrass.

Cotas para semigrupos esparsos com ℓ_g par

Teorema [J. Munuera, F. Torres, J. Villanueva (2009)]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$ par.

Cotas para semigrupos esparsos com ℓ_g par

Teorema [J. Munuera, F. Torres, J. Villanueva (2009)]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$ par.
Se $g \geq 4k - 1$,

Cotas para semigrupos esparsos com ℓ_g par

Teorema [J. Munuera, F. Torres, J. Villanueva (2009)]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$ par.
Se $g \geq 4k - 1$, então $g \leq 6k - n_1$.

Cotas para semigrupos esparsos com ℓ_g par

Teorema [J. Munuera, F. Torres, J. Villanueva (2009)]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$ par.
Se $g \geq 4k - 1$, então $g \leq 6k - n_1$.

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$ par.

Cotas para semigrupos esparsos com ℓ_g par

Teorema [J. Munuera, F. Torres, J. Villanueva (2009)]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$ par.
Se $g \geq 4k - 1$, então $g \leq 6k - n_1$.

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$ par.
Então $g \leq 4k - 1$

Cotas para semigrupos esparsos com ℓ_g par

Teorema [J. Munuera, F. Torres, J. Villanueva (2009)]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$ par.
Se $g \geq 4k - 1$, então $g \leq 6k - n_1$.

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$ par.
Então $g \leq 4k - 1$ (i.e., $D \leq S$).

Semigrupos esparsos limite com ℓ_g ímpar

Denote: $K = 2k + 1$.

Semigrupos esparsos limite com ℓ_g ímpar

Denote: $K = 2k + 1$.

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k + 1$ com $\ell_g = 2g - (2k + 1) = 6k + 1$ ímpar.

Semigrupos esparsos limite com ℓ_g ímpar

Denote: $K = 2k + 1$.

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k + 1$ com $\ell_g = 2g - (2k + 1) = 6k + 1$ ímpar.
Se a multiplicidade n_1 de $\mathcal{H}$ é par, então toda não lacuna menor que ℓ_g é par, e $\mathcal{H}$ é k-hiperelítico.

Semigrupos esparsos limite com ℓ_g ímpar

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k + 1$ com $\ell_g = 2g - (2k + 1) = 6k + 1$ ímpar.

Semigrupos esparsos limite com ℓ_g ímpar

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k + 1$ com $\ell_g = 2g - (2k + 1) = 6k + 1$ ímpar.
Se a multiplicidade n_1 de $\mathcal{H}$ é ímpar, então $\mathcal{H}$ é um dos seguintes semigrupos:

Semigrupos esparsos limite com ℓ_g ímpar

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k + 1$ com $\ell_g = 2g - (2k + 1) = 6k + 1$ ímpar.
Se a multiplicidade n_1 de $\mathcal{H}$ é ímpar, então $\mathcal{H}$ é um dos seguintes semigrupos:

1. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_{6r+1}$;
2. $\mathcal{H} = \langle 2j + 1; j \in \mathbb{N}, r \leq j \leq 2r - 1 \rangle \cup \mathcal{H}_{6r+1}$, com $r > 1$.

Semigrupos esparsos limite com ℓ_g ímpar

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k + 1$ com $\ell_g = 2g - (2k + 1) = 6k + 1$ ímpar.
Se a multiplicidade n_1 de $\mathcal{H}$ é ímpar, então $\mathcal{H}$ é um dos seguintes semigrupos:

1. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_{6r+1}$;
2. $\mathcal{H} = \langle 2j + 1; j \in \mathbb{N}, r \leq j \leq 2r - 1\rangle \cup \mathcal{H}_{6r+1}$, com $r > 1$.

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k + 1$ com $\ell_g = 2g - (2k + 1) = 6k + 1$ ímpar.

Semigrupos esparsos limite com ℓ_g ímpar

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k + 1$ com $\ell_g = 2g - (2k + 1) = 6k + 1$ ímpar.
Se a multiplicidade n_1 de $\mathcal{H}$ é ímpar, então $\mathcal{H}$ é um dos seguintes semigrupos:

1. $\mathcal{H} = 3\mathbb{N} + \mathcal{H}_{6r+1}$;
2. $\mathcal{H} = \langle 2j + 1; j \in \mathbb{N}, r \leq j \leq 2r - 1 \rangle \cup \mathcal{H}_{6r+1}$, com $r > 1$.

Teorema [Contiero, Moreira, Veloso]

Seja $\mathcal{H}$ semigrupo esparso limite de gênero $g = 4k + 1$ com $\ell_g = 2g - (2k + 1) = 6k + 1$ ímpar.
Então ou $g \leq 4k + 1$, ou toda não lacuna menor que ℓ_g é par.

- V. Barucci, D. E. Dobbs, M. Fontana, *Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analytically irreducible local domains*, Mem. Amer. Math. Soc. **125**, 1997.
- C. Munuera, F. Torres, J. Villanueva, *Sparse Numerical Semigroups*, Lecture Notes in Computer Science: Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, **5527**, 23 – 31, Springer-Verlag Berlin Heilderberg (2009).

Obrigada pela atenção!