Frobenius classicalidade com relação a sistemas lineares de curvas de grau arbitrário

Nazar Arakelian

7 de maio de 2014

Cotas para pontos racionais em curvas

Seja $\mathcal{X}$ uma curva algébrica projetiva irredutível não singular de gênero g, definida sobre o corpo finito $\mathbb{F}_q$ de $q = p^h$ elementos, onde p é um número primo. Denote por N o número de pontos $\mathbb{F}_q$-racionais de $\mathcal{X}$.

Cota de Hasse-Weil (1948):

$$|N - (q+1)| \leq 2g\sqrt{q}.$$

Cota de Serre (1983):

$$N \leq q + 1 + g\lfloor 2\sqrt{q} \rfloor.$$

Cotas para pontos racionais em curvas

Seja $\mathcal{X}$ uma curva algébrica projetiva irredutível não singular de gênero g, definida sobre o corpo finito $\mathbb{F}_q$ de $q = p^h$ elementos, onde p é um número primo. Denote por N o número de pontos $\mathbb{F}_q$-racionais de $\mathcal{X}$.

Cota de Hasse-Weil (1948):

$$|N - (q+1)| \leq 2g\sqrt{q}.$$

Cota de Serre (1983):

$$N \leq q + 1 + g\lfloor 2\sqrt{q} \rfloor.$$

Cotas para pontos racionais em curvas

Seja $\mathcal{X}$ uma curva algébrica projetiva irredutível não singular de gênero g, definida sobre o corpo finito $\mathbb{F}_q$ de $q = p^h$ elementos, onde p é um número primo. Denote por N o número de pontos $\mathbb{F}_q$-racionais de $\mathcal{X}$.
Cota de Hasse-Weil (1948):

$$|N - (q+1)| \leq 2g\sqrt{q}.$$

Cota de Serre (1983):

$$N \leq q + 1 + g\lfloor 2\sqrt{q} \rfloor.$$

Cotas para pontos racionais em curvas

Seja $\mathcal{X}$ uma curva algébrica projetiva irredutível não singular de gênero g, definida sobre o corpo finito $\mathbb{F}_q$ de $q = p^h$ elementos, onde p é um número primo. Denote por N o número de pontos $\mathbb{F}_q$-racionais de $\mathcal{X}$.
Cota de Hasse-Weil (1948):

$$|N - (q+1)| \leq 2g\sqrt{q}.$$

Cota de Serre (1983):

$$N \leq q + 1 + g\left\lfloor 2\sqrt{q}\right\rfloor.$$

Cotas para pontos racionais em curvas

Método de Stöhr-Voloch: seja $\mathbb{K}$ o fecho algébrico de $\mathbb{F}_q$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ o espaço projetivo de dimensão n.
Considere $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ um modelo de grau d de $\mathcal{X}$. Associada a este modelo, existe uma sequência de inteiros $(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_n)$, com

$$0 = \epsilon_0 < \epsilon_1 < \cdots < \epsilon_n,$$

chamada sequência de ordens de $\mathcal{C}$. Dizemos que o modelo $\mathcal{C}$

caso contrário.

Cotas para pontos racionais em curvas

Método de Stöhr-Voloch: seja $\mathbb{K}$ o fecho algébrico de $\mathbb{F}_q$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ o espaço projetivo de dimensão n.

Considere $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ um modelo de grau d de $\mathcal{X}$. Associada a este modelo, existe uma sequência de inteiros $(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_n)$, com

$$0 = \epsilon_0 < \epsilon_1 < \cdots < \epsilon_n,$$

chamada sequência de ordens de $\mathcal{C}$. Dizemos que o modelo $\mathcal{C}$ é clássico quando $\epsilon_i = i$ para todo $i = 0, \ldots, n$, e não clássico caso contrário.

Método de Stöhr-Voloch: seja $\mathbb{K}$ o fecho algébrico de $\mathbb{F}_q$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ o espaço projetivo de dimensão n.
Considere $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ um modelo de grau d de $\mathcal{X}$. Associada a este modelo, existe uma sequência de inteiros $(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_n)$, com

$$0 = \epsilon_0 < \epsilon_1 < \cdots < \epsilon_n,$$

chamada sequência de ordens de $\mathcal{C}$. Dizemos que o modelo $\mathcal{C}$ é clássico quando $\epsilon_i = i$ para todo $i = 0, \ldots, n$, e não clássico caso contrário.

Cotas para pontos racionais em curvas

Método de Stöhr-Voloch: seja $\mathbb{K}$ o fecho algébrico de $\mathbb{F}_q$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ o espaço projetivo de dimensão n.
Considere $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ um modelo de grau d de $\mathcal{X}$. Associada a este modelo, existe uma sequência de inteiros $(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_n)$, com

$$0 = \epsilon_0 < \epsilon_1 < \cdots < \epsilon_n,$$

chamada sequência de ordens de $\mathcal{C}$. Dizemos que o modelo $\mathcal{C}$ é clássico quando $\epsilon_i = i$ para todo $i = 0, \ldots, n$, e não clássico caso contrário.

Cotas para pontos racionais em curvas

Método de Stöhr-Voloch: seja $\mathbb{K}$ o fecho algébrico de $\mathbb{F}_q$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ o espaço projetivo de dimensão n.
Considere $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ um modelo de grau d de $\mathcal{X}$. Associada a este modelo, existe uma sequência de inteiros $(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_n)$, com

$$0 = \epsilon_0 < \epsilon_1 < \cdots < \epsilon_n,$$

chamada sequência de ordens de $\mathcal{C}$. Dizemos que o modelo $\mathcal{C}$ é clássico quando $\epsilon_i = i$ para todo $i = 0, \ldots, n$, e não clássico caso contrário.

Cotas para pontos racionais em curvas

Assuma que o modelo $\mathcal{C}$ também está definido sobre $\mathbb{F}_q$.
Existe também uma sequência $(\nu_0, \ldots, \nu_{n-1})$, com

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_{n-1},$$

que depende da cardinalidade q do corpo $\mathbb{F}_q$, chamada sequência $\mathbb{F}_q$-Frobenius de $\mathcal{C}$.
Tal sequência é uma subsequência de $(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_n)$. O modelo $\mathcal{C}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius clássico quando $\nu_i = i$ para $i = 0, \ldots, n-1$; se $\nu_i \neq i$ para algum i, o modelo $\mathcal{C}$ é dito $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássico.

Cotas para pontos racionais em curvas

Assuma que o modelo $\mathcal{C}$ também está definido sobre $\mathbb{F}_q$. Existe também uma sequência $(\nu_0, \dots, \nu_{n-1})$, com

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_{n-1},$$

que depende da cardinalidade q do corpo $\mathbb{F}_q$, chamada sequência $\mathbb{F}_q$-Frobenius de $\mathcal{C}$.
Tal sequência é uma subsequência de $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)$. O modelo $\mathcal{C}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius clássico quando $\nu_i = i$ para $i = 0, \dots, n-1$; se $\nu_i \neq i$ para algum i, o modelo $\mathcal{C}$ é dito $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássico.

Cotas para pontos racionais em curvas

Assuma que o modelo $\mathcal{C}$ também está definido sobre $\mathbb{F}_q$.
Existe também uma sequência $(\nu_0, \dots, \nu_{n-1})$, com

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_{n-1},$$

que depende da cardinalidade q do corpo $\mathbb{F}_q$, chamada sequência $\mathbb{F}_q$-Frobenius de $\mathcal{C}$.
Tal sequência é uma subsequência de $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)$. O modelo $\mathcal{C}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius clássico quando $\nu_i = i$ para $i = 0, \dots, n-1$; se $\nu_i \neq i$ para algum i, o modelo $\mathcal{C}$ é dito $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássico.

Cotas para pontos racionais em curvas

Assuma que o modelo $\mathcal{C}$ também está definido sobre $\mathbb{F}_q$. Existe também uma sequência $(\nu_0, \ldots, \nu_{n-1})$, com

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_{n-1},$$

que depende da cardinalidade q do corpo $\mathbb{F}_q$, chamada sequência $\mathbb{F}_q$-Frobenius de $\mathcal{C}$.
Tal sequência é uma subsequência de $(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_n)$. O modelo $\mathcal{C}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius clássico quando $\nu_i = i$ para $i = 0, \ldots, n-1$; se $\nu_i \neq i$ para algum i, o modelo $\mathcal{C}$ é dito $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássico.

Cotas para pontos racionais em curvas

Através de um divisor cujo suporte contém os pontos de $\mathcal{C}$ tais que a sua imagem pelo mapa $\mathbb{F}_q$-Frobenius em $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ pertence ao hiperplano osculador à curva nos mesmos, é obtida a cota de Stöhr-Voloch:

$$N \leq \frac{(\nu_1 + \cdots + \nu_{n-1})(2g-2) + (q+n)d}{n}. \qquad (1)$$

A cota de Stöhr-Voloch melhora a cota de Hasse-Weil para diversas classes de curvas quando é aplicada ao modelo adequado da curva $\mathcal{X}$.

Cotas para pontos racionais em curvas

Através de um divisor cujo suporte contém os pontos de $\mathcal{C}$ tais que a sua imagem pelo mapa $\mathbb{F}_q$-Frobenius em $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ pertence ao hiperplano osculador à curva nos mesmos, é obtida a cota de Stöhr-Voloch:

$$N \leq \frac{(\nu_1 + \cdots + \nu_{n-1})(2g-2) + (q+n)d}{n}. \qquad (1)$$

A cota de Stöhr-Voloch melhora a cota de Hasse-Weil para diversas classes de curvas quando é aplicada ao modelo adequado da curva $\mathcal{X}$.

Cotas para pontos racionais em curvas

Através de um divisor cujo suporte contém os pontos de $\mathcal{C}$ tais que a sua imagem pelo mapa $\mathbb{F}_q$-Frobenius em $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ pertence ao hiperplano osculador à curva nos mesmos, é obtida a cota de Stöhr-Voloch:

$$N \leq \frac{(\nu_1 + \cdots + \nu_{n-1})(2g-2) + (q+n)d}{n}. \tag{1}$$

A cota de Stöhr-Voloch melhora a cota de Hasse-Weil para diversas classes de curvas quando é aplicada ao modelo adequado da curva $\mathcal{X}$.

Justificativa

Seja $\mathcal{X}$ uma curva algébrica projetiva, irredutível, não singular, de gênero g, definida sobre $\mathbb{F}_q$. Considere

$$F(x, y, z) \in \mathbb{F}_q[x, y, z]$$

um polinômio homogêneo irredutível de grau d tal que

$$\mathcal{C} : F(x, y, z) = 0$$

seja um modelo de $\mathcal{X}$.

Justificativa

Seja $\mathcal{X}$ uma curva algébrica projetiva, irredutível, não singular, de gênero g, definida sobre $\mathbb{F}_q$. Considere

$$F(x, y, z) \in \mathbb{F}_q[x, y, z]$$

um polinômio homogêneo irredutível de grau d tal que

$$\mathcal{C} : F(x, y, z) = 0$$

seja um modelo de $\mathcal{X}$.

Justificativa

Associado ao sistema linear de curvas planas de grau $s \in \{1, \ldots, d-3\}$, temos a série linear $\mathcal{D}_s$, que possui dimensão $M = (s^2 + 3s)/2$ e grau sd. Aplicando o Teorema de Stöhr-Voloch a $\mathcal{D}_s$, temos

$$N \leq \frac{d(d-3)(\nu_0 + \cdots + \nu_M) + sd(q+M)}{M}, \qquad (2)$$

onde $\nu_0, \ldots, \nu_M$ é a sequência de ordens $\mathbb{F}_q$-Frobenius com relação a $\mathcal{D}_s$.

Se a curva $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius clássica com relação a $\mathcal{D}_s$, temos que (2) nos fornece a seguinte cota:

$$N \leq \frac{d(d-3)(M-1)}{2} + \frac{sd(q+M)}{M}. \qquad (3)$$

Justificativa

Associado ao sistema linear de curvas planas de grau $s \in \{1, \ldots, d-3\}$, temos a série linear $\mathcal{D}_s$, que possui dimensão $M = (s^2+3s)/2$ e grau sd. Aplicando o Teorema de Stöhr-Voloch a $\mathcal{D}_s$, temos

$$N \leq \frac{d(d-3)(\nu_0 + \cdots + \nu_M) + sd(q+M)}{M}, \qquad (2)$$

onde $\nu_0, \ldots, \nu_M$ é a sequência de ordens $\mathbb{F}_q$-Frobenius com relação a $\mathcal{D}_s$.

Se a curva $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius clássica com relação a $\mathcal{D}_s$, temos que (2) nos fornece a seguinte cota:

$$N \leq \frac{d(d-3)(M-1)}{2} + \frac{sd(q+M)}{M}. \qquad (3)$$

Justificativa

Associado ao sistema linear de curvas planas de grau $s \in \{1, \ldots, d-3\}$, temos a série linear $\mathcal{D}_s$, que possui dimensão $M = (s^2 + 3s)/2$ e grau sd. Aplicando o Teorema de Stöhr-Voloch a $\mathcal{D}_s$, temos

$$N \leq \frac{d(d-3)(\nu_0 + \cdots + \nu_M) + sd(q+M)}{M}, \qquad (2)$$

onde $\nu_0, \ldots, \nu_M$ é a sequência de ordens $\mathbb{F}_q$-Frobenius com relação a $\mathcal{D}_s$.

Se a curva $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius clássica com relação a $\mathcal{D}_s$, temos que (2) nos fornece a seguinte cota:

$$N \leq \frac{d(d-3)(M-1)}{2} + \frac{sd(q+M)}{M}. \qquad (3)$$

Justificativa

Note que se $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica, temos

$$\nu_1 + \cdots + \nu_{M-1} > M(M-1)/2,$$

o que indica que tais curvas tendem a possuir muitos pontos $\mathbb{F}_q$-racionais. Mais precisamente, nos casos $s = 1$ e $s = 2$, a cota (3) é

$$N \leq \frac{d(d+q-1)}{2} \tag{4}$$

e

$$N \leq \frac{2d(5d+q-10)}{5}, \tag{5}$$

respectivamente. A cota (5) é melhor que (4) se, aproximadamente, $d < q/15$.

Justificativa

Note que se $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica, temos

$$\nu_1 + \cdots + \nu_{M-1} > M(M-1)/2,$$

o que indica que tais curvas tendem a possuir muitos pontos $\mathbb{F}_q$-racionais. Mais precisamente, nos casos $s = 1$ e $s = 2$, a cota (3) é

$$N \leq \frac{d(d+q-1)}{2} \tag{4}$$

e

$$N \leq \frac{2d(5d+q-10)}{5}, \tag{5}$$

respectivamente. A cota (5) é melhor que (4) se, aproximadamente, $d < q/15$.

Justificativa

Note que se $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica, temos

$$\nu_1 + \cdots + \nu_{M-1} > M(M-1)/2,$$

o que indica que tais curvas tendem a possuir muitos pontos $\mathbb{F}_q$-racionais. Mais precisamente, nos casos $s = 1$ e $s = 2$, a cota (3) é

$$N \leq \frac{d(d+q-1)}{2} \tag{4}$$

e

$$N \leq \frac{2d(5d+q-10)}{5}, \tag{5}$$

respectivamente. A cota (5) é melhor que (4) se, aproximadamente, $d < q/15$.

Justificativa

De maneira geral, se $r \geq 1$, a cota (3) para $s = r + 1$ é melhor que a cota correspondente para $s = r$ quando, aproximadamente,

$$d < \left(\frac{4}{(r+2)(r+3)(r+4)} \right) q. \tag{6}$$

Assim, se quisermos encontrar curvas planas de grau $d < q/15$ atingindo a cota (4), temos que procurar por curvas que sejam $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássicas para $\mathcal{D}_2$. Analogamente, curvas planas de grau $d < q/30$ atingindo a cota (5) precisam ser $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássicas com relação a $\mathcal{D}_3$.

Justificativa

De maneira geral, se $r \geq 1$, a cota (3) para $s = r + 1$ é melhor que a cota correspondente para $s = r$ quando, aproximadamente,

$$d < \left(\frac{4}{(r+2)(r+3)(r+4)} \right) q. \tag{6}$$

Assim, se quisermos encontrar curvas planas de grau $d < q/15$ atingindo a cota (4), temos que procurar por curvas que sejam $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássicas para $\mathcal{D}_2$. Analogamente, curvas planas de grau $d < q/30$ atingindo a cota (5) precisam ser $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássicas com relação a $\mathcal{D}_3$.

Justificativa

De maneira geral, se $r \geq 1$, a cota (3) para $s = r + 1$ é melhor que a cota correspondente para $s = r$ quando, aproximadamente,

$$d < \left(\frac{4}{(r+2)(r+3)(r+4)} \right) q. \qquad (6)$$

Assim, se quisermos encontrar curvas planas de grau $d < q/15$ atingindo a cota (4), temos que procurar por curvas que sejam $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássicas para $\mathcal{D}_2$. Analogamente, curvas planas de grau $d < q/30$ atingindo a cota (5) precisam ser $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássicas com relação a $\mathcal{D}_3$.

Curvas Frobenius não clássicas

Considere a curva plana projetiva $\mathcal{X}$, de grau $d = sn$, definida sobre $\mathbb{F}_q$ dada pela equação $F(x, y, z) = 0$, onde

$$F(x, y, z) = \sum_{i+j+t=s} c_{ij} x^{in} y^{jn} z^{tn}, \tag{7}$$

com $s \geq 2$ e $n \geq 2$.

Assumiremos que $p | n - 1$, $p > 5$ para $s = 2$ e $p > s^2$ para $s \geq 3$ (em particular, $p > M$).

Curvas Frobenius não clássicas

Considere a curva plana projetiva $\mathcal{X}$, de grau $d = sn$, definida sobre $\mathbb{F}_q$ dada pela equação $F(x, y, z) = 0$, onde

$$F(x, y, z) = \sum_{i+j+t=s} c_{ij} x^{in} y^{jn} z^{tn}, \tag{7}$$

com $s \geq 2$ e $n \geq 2$.
Assumiremos que $p | n - 1$, $p > 5$ para $s = 2$ e $p > s^2$ para $s \geq 3$ (em particular, $p > M$).

Curvas Frobenius não clássicas

Lemma

Para todo $P = (a : b : c) \in \mathcal{X}$ *tal que* $abc \neq 0$*, a curva s-osculadora* $\mathcal{H}_P^s$ *a* $\mathcal{X}$ *em* P *é uma curva irredutível dada pela equação* $H_P(x, y, z) = 0$*, onde*

$$H_P(x, y, z) = \sum_{i+j+t=s} c_{ij}(a^{im} b^{jm} c^{tm})^{p^v} x^i y^j z^t, \tag{8}$$

$n = mp^v + 1$ *e* $gcd(p, m) = 1$*. Além disso, a curva* $\mathcal{X}$ *é não clássica com relação a* $\mathcal{D}_s$ *mas é clássica com relação a* $\mathcal{D}_i$*,* $1 \leq i \leq s - 1$*.*

Curvas Frobenius não clássicas

Theorem

Seja $\mathcal{H}_P^s$ a curva s-osculadora a $\mathcal{X}$ em P. Então $\Phi_q(P) \in \mathcal{H}_P^s$ para infinitos pontos $P \in \mathcal{X}$ se, e somente se, $n = (p^h - 1)/(p^v - 1)$ e $\mathcal{X}$ está definida sobre $\mathbb{F}_{p^v}$, onde $q = p^h$, $h > v$ e $v|h$.

Corollary

Suponha que $n = (p^h - 1)/(p^v - 1)$ e que $\mathcal{X}$ está definida sobre $\mathbb{F}_{p^v}$, onde $h > v$ e $v|h$. Então $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica com relação a $\mathcal{D}_s$.

Curvas Frobenius não clássicas

Theorem

Seja $\mathcal{H}_P^s$ a curva s-osculadora a $\mathcal{X}$ em P. Então $\Phi_q(P) \in \mathcal{H}_P^s$ para infinitos pontos $P \in \mathcal{X}$ se, e somente se, $n = (p^h - 1)/(p^v - 1)$ e $\mathcal{X}$ está definida sobre $\mathbb{F}_{p^v}$, onde $q = p^h$, $h > v$ e $v|h$.

Corollary

Suponha que $n = (p^h - 1)/(p^v - 1)$ e que $\mathcal{X}$ está definida sobre $\mathbb{F}_{p^v}$, onde $h > v$ e $v|h$. Então $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica com relação a $\mathcal{D}_s$.

Curvas Frobenius não clássicas

Suponha agora que a curva $\mathcal{X}$ satisfaz as hipóteses do corolário anterior. Em particular, $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica com relação a $\mathcal{D}_s$. Seja $\mathcal{C} : G(x,y,z) = 0$ a curva de grau s, definida sobre $\mathbb{F}_{p^v}$, onde

$$G(x,y,z) = \sum_{i+j+t=s} c_{ij} x^i y^j z^t. \tag{9}$$

Note que $F(x,y,z) = G(x^n, y^n, z^n)$, e não singularidade da curva $\mathcal{X}$ implica que $\mathcal{C}$ também é não singular.

Curvas Frobenius não clássicas

Suponha agora que a curva $\mathcal{X}$ satisfaz as hipóteses do corolário anterior. Em particular, $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica com relação a $\mathcal{D}_s$. Seja $\mathcal{C} : G(x, y, z) = 0$ a curva de grau s, definida sobre $\mathbb{F}_{p^v}$, onde

$$G(x, y, z) = \sum_{i+j+t=s} c_{ij} x^i y^j z^t. \tag{9}$$

Note que $F(x, y, z) = G(x^n, y^n, z^n)$, e não singularidade da curva $\mathcal{X}$ implica que $\mathcal{C}$ também é não singular.

Curvas Frobenius não clássicas

Suponha agora que a curva $\mathcal{X}$ satisfaz as hipóteses do corolário anterior. Em particular, $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica com relação a $\mathcal{D}_s$. Seja $\mathcal{C} : G(x, y, z) = 0$ a curva de grau s, definida sobre $\mathbb{F}_{p^v}$, onde

$$G(x, y, z) = \sum_{i+j+t=s} c_{ij} x^i y^j z^t. \tag{9}$$

Note que $F(x, y, z) = G(x^n, y^n, z^n)$, e não singularidade da curva $\mathcal{X}$ implica que $\mathcal{C}$ também é não singular.

Curvas Frobenius não clássicas

Theorem

Se $N_{p^v}(\mathcal{C}) = s(s + p^v - 1)/2$, e se não existem pontos $\mathbb{F}_{p^v}$-racionais $P = (a : b : c :) \in \mathcal{C}$ com $abc = 0$, então

$$N_q(\mathcal{X}) = d(d + q - 1)/2,$$

onde $q = p^h$ e $d = sn$. Em particular, se $s = 2$ e $p^v > 31$, então $\mathcal{X}$ é uma curva de grau $d < q/15$ atingindo a cota (4).

O caso $s = 2$

Considere a curva

$$\mathcal{X} : F(x, y, z) = 0,$$

onde

$$F(x, y, z) = a_1 x^{2n} + a_2 x^n y^n + a_3 y^{2n} + a_4 x^n z^n + a_5 y^n z^n + a_6 z^{2n}, \tag{10}$$

com $a_i \in \mathbb{F}_q$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e assuma o seguinte:

(i.4) $p > 2$.

(ii.4) $\mathcal{X}$ é não singular (em particular, $a_1 a_3 a_6 \neq 0$).

(iii.4) Pelo menos um dos coeficientes a_2, a_4 and a_5 é não nulo. Em outras palavras, a equação (10) não e do tipo Fermat.

O caso $s = 2$

Considere a curva

$$\mathcal{X} : F(x, y, z) = 0,$$

onde

$$F(x, y, z) = a_1x^{2n} + a_2x^ny^n + a_3y^{2n} + a_4x^nz^n + a_5y^nz^n + a_6z^{2n}, \tag{10}$$

com $a_i \in \mathbb{F}_q$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e assuma o seguinte:

(i.4) $p > 2$.

(ii.4) $\mathcal{X}$ é não singular (em particular, $a_1a_3a_6 \neq 0$).

(iii.4) Pelo menos um dos coeficientes a_2, a_4 and a_5 é não nulo. Em outras palavras, a equação (10) não e do tipo Fermat.

O caso $s = 2$

Proposition

Existe um ponto $P \in \mathcal{X}$ cujo a sequencia de $(\mathcal{D}_1, P)$-ordens é $(0, 1, n)$. Em particular, se $\mathcal{X}$ é não clássica com relação a $\mathcal{D}_1$, então $p|n(n-1)$.

Proposition

A curva $\mathcal{X}$ é clássica com relação a $\mathcal{D}_1$. Consequentemente, $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius clássica com relação a $\mathcal{D}_1$.

Segue da Proposição anterior que a cota (4) sempre pode ser aplicada à curva $\mathcal{X}$. Em outras palavras, $N_q(\mathcal{X}) \leq d(d+q-1)/2$.

O caso $s = 2$

Proposition

Existe um ponto $P \in \mathcal{X}$ cujo a sequencia de $(\mathcal{D}_1, P)$-ordens é $(0, 1, n)$. Em particular, se $\mathcal{X}$ é não clássica com relação a $\mathcal{D}_1$, então $p|n(n-1)$.

Proposition

A curva $\mathcal{X}$ é clássica com relação a $\mathcal{D}_1$. Consequentemente, $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius clássica com relação a $\mathcal{D}_1$.

Segue da Proposição anterior que a cota (4) sempre pode ser aplicada à curva $\mathcal{X}$. Em outras palavras, $N_q(\mathcal{X}) \leq d(d+q-1)/2$.

O caso $s = 2$

Proposition

Existe um ponto $P \in \mathcal{X}$ cujo a sequencia de $(\mathcal{D}_1, P)$-ordens é $(0, 1, n)$. Em particular, se $\mathcal{X}$ é não clássica com relação a $\mathcal{D}_1$, então $p|n(n-1)$.

Proposition

A curva $\mathcal{X}$ é clássica com relação a $\mathcal{D}_1$. Consequentemente, $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius clássica com relação a $\mathcal{D}_1$.

Segue da Proposição anterior que a cota (4) sempre pode ser aplicada à curva $\mathcal{X}$. Em outras palavras, $N_q(\mathcal{X}) \leq d(d+q-1)/2$.

O caso $s = 2$

Para estudarmos a classicalidade e $\mathbb{F}_q$-Frobenius classicalidade com relação a $\mathcal{D}_2$, são usadas as seguintes hipóteses adicionais:

(iv.4) $p > 7$.

(v.4) $n > 2$.

Lemma

Se $p|(n+1)(n-2)$, então $\mathcal{X}$ é clássica com relação a $\mathcal{D}_2$.

O caso $s = 2$

Para estudarmos a classicalidade e $\mathbb{F}_q$-Frobenius classicalidade com relação a $\mathcal{D}_2$, são usadas as seguintes hipóteses adicionais:

(iv.4) $p > 7$.

(v.4) $n > 2$.

Lemma

Se $p|(n+1)(n-2)$, então $\mathcal{X}$ é clássica com relação a $\mathcal{D}_2$.

O caso $s = 2$

Lemma

Se $\mathcal{X}$ é não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$, então $p|(n-1)(2n-1)$.

Lemma

Se $p|n-1$, então $\mathcal{X}$ é não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$.

Lemma

Assuma que $p|2n-1$. A curva $\mathcal{X}$ é não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$ se, e somente se, todos exceto um dos coeficientes a_2, a_4 e a_5 são nulos.

O caso $s = 2$

Lemma

Se $\mathcal{X}$ é não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$, então $p|(n-1)(2n-1)$.

Lemma

Se $p|n-1$, então $\mathcal{X}$ é não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$.

Lemma

Assuma que $p|2n-1$. A curva $\mathcal{X}$ é não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$ se, e somente se, todos exceto um dos coeficientes a_2, a_4 e a_5 são nulos.

O caso $s = 2$

Lemma

Se $\mathcal{X}$ é não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$, então $p|(n-1)(2n-1)$.

Lemma

Se $p|n-1$, então $\mathcal{X}$ é não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$.

Lemma

Assuma que $p|2n-1$. A curva $\mathcal{X}$ é não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$ se, e somente se, todos exceto um dos coeficientes a_2, a_4 e a_5 são nulos.

O caso $s = 2$

Theorem

A curva $\mathcal{X}$ é não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$ se, e somente se, uma das seguintes vale:

(1) $p|n-1$.

(2) $p|2n-1$ *e todos exceto um dos coeficientes* a_2, a_4 *e* a_5 *são nulos.*

O caso $s = 2$

Lemma

Assuma que $p|n-1$. Então $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$ se, e somente se, $n = \frac{p^h-1}{p^v-1}$, com $h > v$, $v|h$ e $\mathcal{X}$ está definida sobre $\mathbb{F}_{p^v}$.

Lemma

Assuma que $p|2n-1$. A curva $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica com relação $\mathcal{D}_2$ se, e somente se, todos exceto um dos coeficientes a_2, a_4 e a_5 são nulos, $n = \frac{q-1}{2(p^v-1)}$ para algum inteiro $v < h$ com $v|h$ e, a menos de mudança escalar sobre $\mathbb{F}_q$, a curva $\mathcal{X}$ está definida sobre $\mathbb{F}_{p^v}$.

O caso $s = 2$

Lemma

Assuma que $p | n-1$. Então $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$ se, e somente se, $n = \frac{p^h-1}{p^v-1}$, com $h > v$, $v|h$ e $\mathcal{X}$ está definida sobre $\mathbb{F}_{p^v}$.

Lemma

Assuma que $p | 2n-1$. A curva $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica com relação $\mathcal{D}_2$ se, e somente se, todos exceto um dos coeficientes a_2, a_4 e a_5 são nulos, $n = \frac{q-1}{2(p^v-1)}$ para algum inteiro $v < h$ com $v|h$ e, a menos de mudança escalar sobre $\mathbb{F}_q$, a curva $\mathcal{X}$ está definida sobre $\mathbb{F}_{p^v}$.

O caso $s = 2$

Theorem

A curva $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$ se, e somente se, vale uma das seguintes:

(1) $p | n - 1$ *e* $n = \frac{p^h - 1}{p^v - 1}$ *para algum inteiro* $v < h$ *com* $v | h$, *e* $\mathcal{X}$ *está definido sobre* $\mathbb{F}_{p^v}$.

(2) $p | 2n - 1$, *todos exceto um dos coeficientes* a_2, a_4 *e* a_5 *são nulos,* $n = \frac{q-1}{2(p^v - 1)}$ *para algum inteiro* $v < h$ *com* $v | h$ *e, a menos de mudança escalar sobre* $\mathbb{F}_q$, *a curva* $\mathcal{X}$ *está definida sobre* $\mathbb{F}_{p^v}$.

Número de pontos racionais

Como mencionamos antes, se a curva $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius clássica com relação a $\mathcal{D}_2$, a cota de Stöhr-Voloch fornece

$$N_q(\mathcal{X}) \leq \frac{2d(5d+q-10)}{5}. \tag{11}$$

onde $d = \deg \mathcal{X}$. Nos casos em que $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$, temos o seguinte.

Número de pontos racionais

Como mencionamos antes, se a curva $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius clássica com relação a $\mathcal{D}_2$, a cota de Stöhr-Voloch fornece

$$N_q(\mathcal{X}) \leq \frac{2d(5d+q-10)}{5}. \tag{11}$$

onde $d = \deg \mathcal{X}$. Nos casos em que $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_q$-Frobenius não clássica com relação a $\mathcal{D}_2$, temos o seguinte.

Número de pontos racionais

Theorem

Para $i = 1, \cdots, 6$, *sejam* $a_i \in \mathbb{F}_{p^v}$ *tais que a curva*

$$\mathcal{X} : a_1x^{2n} + a_2x^ny^n + a_3y^{2n} + a_4x^nz^n + a_5y^nz^n + a_6z^{2n} = 0$$

seja lisa. Se $n = \frac{q-1}{p^v-1}$, *então o número de pontos* $\mathbb{F}_q$*-racionais de* $\mathcal{X}$ *é dado por*

$$N = n\Big(n(p^v + 1) - \delta(n-1)\Big), \tag{12}$$

onde δ *é o número de pontos* $\mathbb{F}_{p^v}$*-racionais* $P = (a : b : c)$ *da cônica* $\mathcal{C} : a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2 = 0$ *satisfazendo* $abc = 0$.

Número de pontos racionais

Example

Considere a curva
$\mathcal{X} : x^{88} + 3x^{44}y^{44} + y^{88} + 3x^{44}z^{44} + 3y^{44}z^{44} + z^{88} = 0$ *sobre* $\mathbb{F}_{43^2}$. *A curva* $\mathcal{X}$ *possui grau* $d = 2n$, *onde* $n = \frac{43^2-1}{43-1}$. *Pode-se checar que a cônica* $\mathcal{C} : x^2 + 3xy + y^2 + 3xz + 3yz + z^2 = 0$ *não possui pontos* $\mathbb{F}_{43}$*-racionais* $P = (a : b : c)$ *com* $abc = 0$. *Portanto o teorema anterior nos fornece* $N_q(\mathcal{X}) = 85814$. *Note que o número dado em (11) é menor que* 80221.

Número de pontos racionais

Theorem

Sejam $a, b, c \in \mathbb{F}_{p^\nu}^*$. *Se* $n = \frac{q-1}{2(p^\nu - 1)}$, *então o número de pontos* $\mathbb{F}_q$*-racionais em uma curva lisa*

$$\mathcal{X} : ax^{2n} + bx^n y^n + cy^{2n} + z^{2n} = 0$$

é dado por

$$N_q(\mathcal{X}) = n\Big(q + 3 - (2n - 1) \cdot \eta\Big), \tag{13}$$

onde η *é o número de distintas* $\mathbb{F}_{p^\nu}$*-raízes de* $ax^2 + bx + c = 0$.

Número de pontos racionais

Example

Considere a curva $\mathcal{X} : x^{20} + 2x^{10}y^{10} - y^{20} + z^{20} = 0$ *sobre* $\mathbb{F}_{19^2}$*. Note que* $\mathcal{X}$ *tem grau* $d = 2n$*, onde* $n = \frac{19^2-1}{2(19-1)}$*. Como a equação* $x^2 + 2x - 1 = 0$ *não possui raízes* $\mathbb{F}_{19}$*-racionais, o teorema anterior fornece* $N_q(\mathcal{X}) = 3640$*. Observe que o número dado pela cota (11) é* 3608*.*

Fim

Obrigado!