

# O comportamento assintótico da função que conta a quantidade de semigrupos numéricos em função do gênero

15 de dezembro de 2014

Matheus Bernardini de Souza - Unicamp

Um semigrupo numérico  $H$  é um subconjunto de  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$  que contém 0, é aditivamente fechado e tem complemento finito em  $\mathbb{N}_0$ . O gênero do semigrupo  $H$  é a cardinalidade de  $\mathbb{N}_0 \setminus H$ . Fixado  $g \in \mathbb{N}_0$ , temos que  $n_g$  é a quantidade de semigrupos numéricos de gênero  $g$ .

Em [3] é provado que  $n_g \leq C_g = \frac{1}{g} \binom{2g}{g}$ , em que  $C_g$  é o número de Catalan de ordem  $g$ . Em [1] é conjecturado que  $n_g$  tem comportamento assintótico equivalente à  $F_g$ , em que  $(F_g)$  é a sequência dos números de Fibonacci. De fato, são propostas três conjecturas, dentre as quais duas já foram resolvidas (em [6]) e uma ainda permanece em aberto (essa última afirma que  $n_g \geq n_{g-1} + n_{g-2}$ , para todo  $g \geq 2$ ). Antes de essas conjecturas serem provadas, foi verificado em [1] que  $n_g$  satisfaz  $2F_g \leq n_g \leq 1 + 3 \cdot 2^{g-3}$ , para todo  $g \geq 3$ , isto é,  $n_g$  cresce assitoticamente como  $\alpha^g$ , em que  $\varphi \leq \alpha \leq 2$ , com  $\varphi$  sendo o número áureo.

Neste seminário vamos verificar os avanços feitos em [3], [2] e [1] e relacioná-los com outro problema: o comportamento da função  $n_g(p, q)$  que conta a quantidade de semigrupos numéricos que contém  $\langle p, q \rangle$  e tem gênero  $g$  ( $p$  e  $q$  estão fixados).

## Referências

- [1] BRAS-AMORÓS, M., *Bounds on the number of numerical semigroups of a given genus*. Journal of Pure and Applied Algebra **213** n. 6 (2009) 997-1001.
- [2] BRAS-AMORÓS, M., *Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus*. Semigroup Forum **76** n. 2 (2008) 379-384.
- [3] BRAS-AMORÓS, M. & de Mier, A. *Representation of numerical semigroups by Dyck paths*. Semigroup Forum **75** n. 3 (2007) 676-681.
- [4] HELLUS, M. & WALDI, R., *On the number of numerical semigroups containing two coprime integers  $p$  and  $q$  (preprint)*.
- [5] ROSALES, J.C. & GARCIA-SÁNCHEZ P.A., *Numerical Semigroups*, Developments in Mathematics, Springer New York, 2009.
- [6] ZHAI, A., *Fibonacci-like growth of numerical semigroups of a given genus*. Semigroup Forum **86** n. 3 (2013) 634-662.