Contando semigrupos numéricos por multiplicidade e gênero

15 de maio de 2015

Matheus Bernardini de Souza - Unicamp

Um semigrupo numérico S é um subconjunto de $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$ que contém 0, é aditivamente fechado e tem complemento finito em $\mathbb{N}_0$. O gênero e a multiplicidade de S são, respectivamente, a cardinalidade de $\mathbb{N}_0 \setminus S$ e o menor elemento não nulo de S. Fixados $g \in \mathbb{N}_0$ e $m \in \mathbb{N}$, temos que $N(g)$ é a quantidade de semigrupos numéricos de gênero g e $N(m, g)$ é a quantidade de semigrupos numéricos de gênero g e multiplicidade m. É possível verificar que $N(0) = N(1) = 1$ e $N(g) = \sum_{m=2}^{g+1} N(m, g)$ para $g \geq 2$.

Em [1] são propostas três conjecturas relacionadas a $N(g)$:

1. $N(g) \geq N(g-1) + N(g-2)$, para todo $g \geq 2$;
2. $\lim_{g\to\infty} \frac{N(g)}{N(g-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$;
3. $\lim_{g\to\infty} \frac{N(g)}{N(g-1)+N(g-2)} = 1$.

Em [4], foram resolvidas as duas últimas e primeira ainda permanece em aberto. De fato, ainda está em aberto determinar se $N(g) \geq N(g-1)$, para todo $g \geq 1$, apesar de essa propriedade ser verdadeira para g suficientemente grande.

Neste seminário vamos apresentar uma bijeção entre o conjunto de semigrupos numéricos de multiplicidade m e gênero g fixados e o conjunto de pontos inteiros de um politopo racional e verificar alguns avanços feitos em [2].

Referências

[1] BRAS-AMORÓS, M., *Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus.* Semigroup Forum **76** n. 2 (2008) 379-384.

[2] KAPLAN, N., *Counting numerical semigroups by genus and some cases of a question of Wilf.* Journal of Pure and Applied Algebra **216** n. 6 (2012) 1016-1032.

[3] ROSALES, J.C. and GARCIA-SÁNCHEZ P.A., *Numerical Semigroups*, Developments in Mathematics, Springer New York, 2009.

[4] ZHAI, A., *Fibonacci-like growth of numerical semigroups of a given genus.* Semigroup Forum **86** n. 3 (2013) 634-662.