Semigrupos de Weierstrass
Curvas Sobre Corpos Finitos
Recobrimento Duplo
Problemas
Bibliografia

Pontos de Weierstrass em recobrimento duplo de curvas algébricas

José Gilvan de Oliveira

Departamento de Matemática
UFES
31/03/2014

1. Semigrupos de Weierstrass
2. Curvas Sobre Corpos Finitos
3. Recobrimento Duplo
4. Problemas
5. Bibliografia

Exemplo

Pontos de Weierstrass em recobrimento duplo de curvas algébricas

Semigrupos de Weierstrass

Curvas Sobre Corpos Finitos

Recobrimento Duplo

Problemas

Bibliografia

Exemplo

Seja $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais.

O conjunto $< 3,\ 4 >= 3\mathbb{N}\ +\ 4\mathbb{N}$, isto é,

$< 3,\ 4 >= \mathbb{N} \backslash \{1,\ 2,\ 5\}$,

tem *gênero* $g = 3$ e as suas *lacunas* são

$\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$ e $\ell_3 = 5$.

Exemplo

Exemplo

Sejam $m < n$ inteiros positivos primos entre si.

Então $< m, n >$ tem gênero

$g = (m - 1)(n - 1)/2$

e a sua maior lacuna é $\ell_g = 2g - 1$.

J. J. Sylvester, 1882.

Problema de Hurwitz

Pontos de Weierstrass em recobrimento duplo de curvas algébricas

Semigrupos de Weierstrass

Curvas Sobre Corpos Finitos

Recobrimento Duplo

Problemas

Bibliografia

O subconjunto
$N = \{0 = n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$ de $\mathbb{N}$ é um *semigrupo numérico de gênero g*
se é fechado para a adição e
$N = \mathbb{N} \setminus \{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_g\}$.
$\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_g$ são as *lacunas* de N.

Problema de Hurwitz

O subconjunto
$N = \{0 = n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$ de $\mathbb{N}$ é um
semigrupo numérico de gênero g
se é fechado para a adição e
$N = \mathbb{N} \setminus \{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_g\}$.
$\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_g$ são as *lacunas* de N.

- Teorema das lacunas de Weierstrass.

Problema de Hurwitz

O subconjunto
$N = \{0 = n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$ de $\mathbb{N}$ é um *semigrupo numérico de gênero g*
se é fechado para a adição e
$N = \mathbb{N} \setminus \{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_g\}$.
$\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_g$ são as *lacunas* de N.

- Teorema das lacunas de Weierstrass.

Existe semigrupo numérico $N = \mathbb{N} \setminus L$ de gênero $g = 16$ que não é semigrupo de Weierstrass (Buchweitz, 1980).
$\sharp L_2 = \sharp(L + L) > 3g - 3.$

Semigrupos numéricos X Semigrupos de Weierstrass

Pontos de Weierstrass em recobrimento duplo de curvas algébricas

Semigrupos de Weierstrass

Curvas Sobre Corpos Finitos

Recobrimento Duplo

Problemas

Bibliografia

Semigrupos numéricos X Semigrupos de Weierstrass

Existe semigrupo $N = \mathbb{N} \backslash L$ de gênero g tal que $\sharp L_m > (2m-1)(g-1)$ para algum $m > 2$ (Komeda, Semigroup Forum, 1998).

Semigrupos numéricos X Semigrupos de Weierstrass

Existe semigrupo $N = \mathbb{N} \backslash L$ de gênero g tal que $\sharp L_m > (2m-1)(g-1)$ para algum $m > 2$ (Komeda, Semigroup Forum, 1998).

Se $\ell_g \geq 2g-4$ então $\sharp L_m \leq (2m-1)(g-1)$ para todo $m \geq 2$, e vale "$=$" se, e somente se, $\ell_g = 2g-1$ *semigrupo simétrico.*
(Oliveira, Semigroup Forum, 2004)

Existem semigrupos com $n_1 = 8$ e $n_1 = 12$ que não são Weierstrass.
(Komeda, Comm. Algebra, 2013)

Semigrupos simétricos que não são Weierstrass

Pontos de Weierstrass em recobrimento duplo de curvas algébricas

Semigrupos de Weierstrass

Curvas Sobre Corpos Finitos

Recobrimento Duplo

Problemas

Bibliografia

Semigrupos simétricos que não são Weierstrass

Stöhr (1994): Para cada $g \geq 100$ existe semigrupo simétrico de gênero g que não é Weiertrass.

Tome $\tilde{N}$ de gênero γ como Buchweitz (existe para $\gamma \geq 16$)

$N = 2\tilde{N} \cup \{2g - 1 - 2n \,/\, n \in \mathbb{Z} \backslash \tilde{N}\}$ e use F. Torres (1994).

Alguns resultados conhecidos

Alguns resultados conhecidos

- Multiplicidade $n_1 \leq 5$ (Komeda, Manusc. Math. (1992))

Alguns resultados conhecidos

- Multiplicidade $n_1 \leq 5$
(Komeda, Manusc. Math. (1992))

- Gênero $g \leq 8$
(Komeda - Ohbuchi, Bull. Braz. Math. Soc. (2008) - diversos)

Alguns resultados conhecidos

- Multiplicidade $n_1 \leq 5$
  (Komeda, Manusc. Math. (1992))
- Gênero $g \leq 8$
  (Komeda - Ohbuchi, Bull. Braz. Math. Soc. (2008) - diversos)
- Peso $w = \sum(\ell_j - j) \leq g/2$
  (Eisenbud - Harris, Invent. Math. (1987))

Número de Pontos Racionais

Número de Pontos Racionais

Teorema de Hasse-Weil:
Se $\mathtt{N}$ é o número de pontos racionais de uma curva de gênero g sobre um corpo com q elementos então:

$$1 + q - 2g\sqrt{q} \leq \mathtt{N} \leq 1 + q + 2g\sqrt{q}.$$

Número de Pontos Racionais

Teorema de Hasse-Weil:
Se $\mathtt{N}$ é o número de pontos racionais de uma curva de gênero g sobre um corpo com q elementos então:

$$1 + q - 2g\sqrt{q} \leq \mathtt{N} \leq 1 + q + 2g\sqrt{q}.$$

Stöhr-Voloch
(Proc. London Math. Soc. - 1986):

$$\mathtt{N} \leq 2q + g(g-1).$$

Número de Pontos Racionais

Lewittes (J.P.A. Algebra - 1990):

$$\mathtt{N} \leq qn_1 + 1.$$

Número de Pontos Racionais

Lewittes (J.P.A. Algebra - 1990):

$$\mathtt{N} \leq qn_1 + 1.$$

Geil-Matsumoto (J.P.A. Algebra - 2009):

$$\mathtt{N} \leq 1 + |N \setminus \cup_1^r (qn_j + N)|.$$

Número de Pontos Racionais

Lewittes (J.P.A. Algebra - 1990):

$$\mathtt{N} \leq qn_1 + 1.$$

Geil-Matsumoto (J.P.A. Algebra - 2009):

$$\mathtt{N} \leq 1 + |N \setminus \cup_1^r (qn_j + N)|.$$

- Aplicação em torres de corpos de funções.
- Se os semigrupos são telescópicos em uma torre de corpos de funções então ela não é assintoticamente boa.
- Aplicação em Códigos de Corretores de erros.

Semigrupos em uma torre ótima

j	g_j	N^j
0	0	0-∞
1	1	0; 2-∞
2	3	0; 3-4; 6-∞
3	9	0; 6; 8; 11-12; 14-∞
4	21	0; 12; 15-16; 22-24; 27-32; 34-∞
5	49	0; 24; 30-32; 44; 46-48; 53-56; 58-64; 68-72; 74-∞
6	105	0; 48; 60; 62-64; 88; 92; 94-96; 103; 106-112; 115-128; 135-136; 138-144; 147-∞
7	225	0; 96; 120; 124; 126-128; 176; 184; 188; 190-192; 206; 212-216; 218; 220-224; 230-232; 234-240; 242-256; 263; 269-272; 276-280; 282-288; 291; 293-∞

Noseda, Oliveira, Quoos - IEEE Trans. Inf. Theory, 2012.

Semigrupos em uma torre ótima

For $j = 8$ we have $g_8 = 465$ and the non-gap intervals are:

0	192	240	248	252	254-256	35
376	380	382-384	412	423-424	426	42
432	436	439-440	442	444-448	459-464	467-
483-484	486-512	519	526-527	533	535	538-
547	549	551-552	554-561	563-576	579	581-

Torre Ótima: $T_0 = \mathbb{F}_{p^2}(x_0)$ e $T_{j+1} = T_j(x_{j+1})$, onde $p > 2$ primo e

$$x_{j+1}^2 = \frac{x_j^2 + 1}{2x_j}.$$

Noseda, Oliveira, Quoos - IEEE Trans. Inf. Theory, 2012.

Recobrimento duplo

Recobrimento duplo

Pontos de Weierstrass em recobrimento duplo de curvas algébricas

Semigrupos de Weierstrass

Curvas Sobre Corpos Finitos

Recobrimento Duplo

Problemas

Bibliografia

Semigrupos com $n_1 = 4$, $n_2 = 6$, $n_3 = 8$
(Kato - 1979)
Recobrimento duplo de curva de gênero 1.

Recobrimento duplo

Semigrupos com $n_1 = 4$, $n_2 = 6$, $n_3 = 8$
(Kato - 1979)
Recobrimento duplo de curva de gênero 1.

Curvas com todos os P.W. de peso máximo:
Kuribayashi-Komiya ($g = 3$) e Wiman ($g = 5$).
Estas são todas: C. Keem - G. Martens, (2010).

Recobrimento duplo

Semigrupos com $n_1 = 4$, $n_2 = 6$, $n_3 = 8$
(Kato - 1979)
Recobrimento duplo de curva de gênero 1.

Curvas com todos os P.W. de peso máximo:
Kuribayashi-Komiya ($g = 3$) e Wiman ($g = 5$).
Estas são todas: C. Keem - G. Martens, (2010).

Semigrupos com $n_1 = 6$, $n_2 = 8$, $n_3 = 10$
(Garcia - 1986, Torres, Manusc. Math. 1994,
Oliveira - Pimentel, Semigroup Forum (2008))
Recobrimento duplo de curva de gênero 2.

Recobrimento duplo. Exemplos

Recobrimento duplo. Exemplos

$$N_1 = < 6,\ 8,\ 10,\ 2g-3,\ 2g-1,\ 2g+1 >$$

$$N_2 = < 6,\ 8,\ 10,\ 2g-7,\ 2g-1 >$$

$$N_3 = < 6,\ 8,\ 10,\ 2g-5,\ 2g-3 >$$

$$N_4 = < 6,\ 8,\ 10,\ 2g-5,\ 2g-1 >$$

Recobrimento duplo

Problema: Quais são os valores de $w(N)$?

Problema: Quais são os valores de $w(P)$?

Recobrimento duplo

Recobrimento duplo

Seja $\mathcal{X}$ (γ-hiperelíptica, ou seja,) um recobrimento duplo de uma curva $\tilde{\mathcal{X}}$ de gênero γ, isto é, existe um morfismo $\pi : \mathcal{X} \to \tilde{\mathcal{X}}$ de grau 2. Se $P \in \mathcal{X}$ é ramificado (assim $g \geq 2\gamma$) e $\pi(P) = \tilde{P}$, então para os semigrupos de Weierstrass $N = N(P)$ e $\tilde{N} = N(\tilde{P})$ temos

$$N = 2\tilde{N} \cup \{u_\gamma < \cdots < u_1\} \cup \{2g + j / j \in \mathbb{N}\}$$

(N é recobrimento duplo de $\tilde{N}$).

Recobrimento duplo

Recobrimento duplo

Teorema(Kato, Garcia, Torres - 1994)

Sejam $\gamma \geq 0$ e $g \geq F(\gamma)$

$(F(\gamma) = \gamma^2 + 4\gamma + 3 \quad$ se $\quad \gamma \geq 7)$.

São equivalentes:

Recobrimento duplo

- $\exists P \in \mathcal{X}$ tal que $N(P)$ é da forma acima.
- $\exists P \in \mathcal{X}$ tal que

  $$\binom{g-2\gamma}{2} \leq w(P) \leq \binom{g-2\gamma}{2} + 2\gamma^2.$$

- $\mathcal{X}$ é γ-hiperelíptica.

Recobrimento duplo

Pontos de Weierstrass em recobrimento duplo de curvas algébricas

Semigrupos de Weierstrass

Curvas Sobre Corpos Finitos

Recobrimento Duplo

Problemas

Bibliografia

Recobrimento duplo

Pontos de Weierstrass em recobrimento duplo de curvas algébricas

Semigrupos de Weierstrass

Curvas Sobre Corpos Finitos

Recobrimento Duplo

Problemas

Bibliografia

Um semigrupo N é γ-hiperelíptico se tem γ lacunas pares.

Se $g \geq F(\gamma)$ então N é γ-hiperelíptico se e somente se

$$\binom{g-2\gamma}{2} \leq w(N) \leq \binom{g-2\gamma}{2} + 2\gamma^2.$$

(Torres, Semigroup Forum (1997))

Recobrimento duplo

Para N um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero $g \geq 2\gamma$ seja $D(N) := w(N) - \binom{g-2\gamma}{2}$.

Recobrimento duplo. Exemplo 1

Pontos de Weierstrass em recobrimento duplo de curvas algébricas

Semigrupos de Weierstrass

Curvas Sobre Corpos Finitos

Recobrimento Duplo

Problemas

Bibliografia

Recobrimento duplo. Exemplo 1

Exemplo

Se $\gamma = 0$ *então* $D(N) = 0$.

Este caso é possível apenas se $2 \in N$ *e*

o semigrupo é Weierstrass para $g \geq F(0) = 2$;

(Farkas - Kra, 1992).

Recobrimento duplo. Exemplo 2

Recobrimento duplo. Exemplo 2

Exemplo

Se $\gamma = 1$ *então* $D(N) = 0$ *or* $D(N) = 2$.

O primeiro caso ocorre se e somente se $m_1 = 4$ *e* $u_1 = 2g - 1$.
O segundo ocorre se e somente se $m_1 = 4$ *e* $u_1 = 2g - 3$.

Em ambos os casos N é Weierstrass (Komeda, J. reine angew. Math. 1983)).

Recobrimento duplo. Exemplo 3

Recobrimento duplo. Exemplo 3

Exemplo

Se $\gamma = 2$ *e* $g \geq F(2) = 23$ *então* $D(N) \in \{2i : i = 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Além disso $D(N) \neq 6$ *e* $m_1 \in \{4, 6\}$.

Se $m_1 = 4$ *então* $D(N) = 8$ *ou* $D(N) \leq 4$

Se $m_1 = 6$ *então* N *é recobrimento duplo do semigrupo* $\tilde{N} = \{0, 3, 4, 5, \ldots\}$ *e portanto* $D(N) = 4g - 4 - u_2 - u_1$.

Recobrimento duplo. Exemplo 4

Pontos de Weierstrass em recobrimento duplo de curvas algébricas

Semigrupos de Weierstrass

Curvas Sobre Corpos Finitos

Recobrimento Duplo

Problemas

Bibliografia

Recobrimento duplo. Exemplo 4

Exemplo

Se $\gamma = 3$ *e* $g \geq F(3) = 34$ *então* $D(N) \in \{2i : i = 0, \ldots, 9\} \setminus \{16\}$.

Temos a seguinte tabela:

Recobrimento duplo. Exemplo 4

Recobrimento duplo. Exemplo 4

N	D(N)	Weierstrass
$< 4, 14, 2g-11 >$	18	Sim (Komeda)
$2 < 3, 4 > + S$	14	Sim
$< 4, 14, 2g-9 >$	12	Sim (Komeda)
$2 < 3, 5, 7 > + S$	10	Sim
$< 4, 14, 2g-7, 2g-1 >$	8	Sim (Komeda)
$2 < 4, 5, 6, 7 > + S$	6	Sim

Recobrimento duplo. Exemplo 4

Pontos de Weierstrass em recobrimento duplo de curvas algébricas

Semigrupos de Weierstrass

Curvas Sobre Corpos Finitos

Recobrimento Duplo

Problemas

Bibliografia

N	D(N)	Weierstrass
$< 4, 14, 2g - 11 >$	18	Sim (Komeda)
$2 < 3, 4 > +S$	14	Sim
$< 4, 14, 2g - 9 >$	12	Sim (Komeda)
$2 < 3, 5, 7 > +S$	10	Sim
$< 4, 14, 2g - 7, 2g - 1 >$	8	Sim (Komeda)
$2 < 4, 5, 6, 7 > +S$	6	Sim

onde $S = (2g - 11)\mathbb{N}$.

Recobrimento duplo. Exemplo 4

Recobrimento duplo. Exemplo 4

$2 < 3,4 > \cup S_1$ ($g > 8$ impar)	6	Sim
$2 < 3,4 > \cup \{h : h \geq 2g - 5\}$	4	?
$2 < 3,5 > \cup \{h : h \geq 2g - 5\}$	2	?
$2 < 4,5,6,7 > \cup S_2$	0	Sim (del Pozo)

onde $S_1 = \{2g - 7, 2g - 3, 2g - 1\} \cup T$
$S_2 = \{2g - 5, 2g - 3, 2g - 1\} \cup T$ e
T é o conjunto dos inteiros maiores que $2g - 1$.

Recobrimento duplo. Exemplo 5

Recobrimento duplo. Exemplo 5

Exemplo

Se $\gamma = 4$ *e* $g \geq F(4) = 44$ *então*

$$D(N) \in \{2i : i = 0, 1, \ldots, 16\} \setminus \{30\}.$$

Para $k = 1, 2, 3, 4, 5$ *temos*
$D(N) = 32 - (4 + k)(5 - k) = 32, 24, 18, 14, 12$
(semigrupo de Weierstrass com multiplicidade 4*).*

Recobrimento duplo. Exemplo 5

Recobrimento duplo. Exemplo 5

Exemplo

No caso $\gamma = 4$, as seguintes questões continuam em aberto:

(a) Existe N tal que $D(N) = 28, 26, 22$?

(b) Os semigrupos com $u_4 = 2g - 7$ são semigrupos de Weierstrass?
(Oliveira, Torres, Villanueva - 2010)

Problemas

Semigrupos de Weierstrass
Curvas Sobre Corpos Finitos
Recobrimento Duplo
Problemas
Bibliografia

Problemas

- *Projeto de pesquisa: recobrimento duplo de curvas hiperelípticas de gênero γ qualquer.*

Problemas

- *Projeto de pesquisa: recobrimento duplo de curvas hiperelípticas de gênero γ qualquer.*
- *Comportamento assintótico do número de semigrupos de gênero g:*
  Conjectura de Bras-Amorós

Bibliografia

- A. del Centina, *Weierstrass points and their impact in the study of algebraic curves: a historical account from the "Lückensatz" to the 1970s*, Ann. Univ. Ferrara **54** (2008), 37–59.
- D. Eisenbud and J. Harris, *Existence, decomposition and limits of certain Weierstrass points*, Invent. Math. **87** (1987), 495–515.
- A. Garcia, *Weights of Weierstrass points in double coverings of curves of genus one or two*, Manuscripta Math. **55** (1986), 419–432.
- T. Kato, *Non-hyperelliptic Weierstrass points of maximal weight*, Math. Ann. **239** (1979), 141–147.
- J. Komeda and A. Ohbuchi, *On double coverings of a pointed non-singular curve with any Weierstrass*

Bibliografia

J. Komeda, *Double coverings of curves and non-Weierstrass semigroups*, Communications in Algebra **41** (2013), 312–324.

J. Komeda and A. Ohbuchi, *Existence of the non-primitive Weierstrass gap sequences on curves of genus 8*, Bull. Braz. Math. Soc. **39** (2008), 109–121.

J. Komeda, *Non-Weierstrass numerical semigroups*, Semigroup Forum **57** (1998), 157–185.

J. Komeda, *On the existence of Weierstrass gap sequences on curves of genus* ≤ 8, J. Pure Appl. Algebra **97** (1994), 51–71.

J. Komeda, *On the existence of Weierstrass points whose first non-gaps are five*, Manuscripta Math. **76**(2) (1992), 193–211.

Bibliografia

J. Komeda, *On Weierstrass points whose first non-gaps are four*, J. reine angew. Math. **341** (1983), 68–86.

Noseda, F., Oliveira, G., Quoos, L., *Bases for Riemann-Roch Spaces of one-Point Divisors on an Optimal Tower of Function Fields*, IEEE Trans. Inf. Theory **58** (5) (2012), 2589–2598.

G. Oliveira, *Weierstrass semigroups and the canonical ideal of non-trigonal curves*, Manuscripta Math. **71** (1991), 431–450.

G. Oliveira, *Numerical Semigroups Whose Last Gap is Large*, Semigroup Forum **69** (2004), 423–430.

G. Oliveira and F.R.L. Pimentel, *On Weierstrass semigroups of double covering of genus two curves*, Semigroup Forum **77** (2008), 152–162.

Bibliografia

A.L. Perez del Pozo, *On the weights of fixed points of automorphism of a compact Riemann surface*, Arch. Math. **86** (2006), 50–55.

F. Torres, *On γ-hyperelliptic numerical semigroups*, Semigroup Forum **55** (1997), 364–379.

F. Torres, *Weierstrass points and double coverings of curves with applications: Symmetric numerical semigroups which cannot be realized as Weierstrass semigroups*, Manuscripta Math. **83** (1994), 39–58.

C. Towse, *Weierstrass weights of fixed points of an involution*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **122** (1997), 385–392.

J. Villanueva, "Semigrupos fracamente de Arf e pesos de semigrupos", Ph. D. Thesis, UNICAMP, 2008.

Obrigado

gilvan@cce.ufes.br

jgilvanol@gmail.com