SEMINARIO: CURVAS ALGÉBRICAS E TEMAS AFINS (CAta)
CURVAS MAXIMAIS DE TIPO FERMAT, KLEIN, HURWITZ, HIPERELÍTICAS, ...

FERNANDO TORRES
15 DE SETEMBRO DE 2014

Para uma curva (não singular, projetiva, geometricamente irredutível) $\mathcal{X}$ definida sobre um corpo finito $\mathbb{K}$ com ℓ elementos o conjunto $\mathcal{X}(\mathbb{K})$ de seus pontos $\mathbb{K}$-racionais tem no maximo $\ell + 1 + 2g \cdot \sqrt{\ell}$ elementos (cota de Hasse-Weil), onde $g = g(\mathcal{X})$ é o gênero de $\mathcal{X}$. Esta palestra está relacionada com *curvas maximais sobre* $\mathbb{K}$, i.e., com aquelas curvas $\mathcal{X}$ sobre $\mathbb{K}$ onde $\#\mathcal{X}(\mathbb{K})$ atinge a cota de Hasse-Weil acima, onde $\ell = q^2$.

É um problema matemático de "considerável dificuldade" e "considerável interesse" o descrever implicitamente (mediante invariantes como o gênero) ou explicitamente (mediante equações) curvas maximais sobre $\mathbb{K}$ (fixado este corpo). Temos e.g. que o gênero de uma tal curva está limitada superiormente por $q(q-1)/2$ e que este valor só é possivel para a "mítica" curva Hermitiana sobre $\mathbb{K}$ que não é outra que a curva de Fermat de grau $q+1$, $\mathbf{F}_{q+1} : u^{q+1} + v^{q+1} + 1 = 0$. Como obter outros exemplos? Temos uma observação usualmente atribuida a J.P. Serre, que afirma que tuda curva não trivialmente $\mathbb{K}$-coberta por uma curva maximal sobre $\mathbb{K}$, é maximal sobre $\mathbb{K}$. Temos assem aquelas curvas maximais recobertas por $\mathbf{F}_{q+1}$ e aquelas que não, sendo esta última possibilidade não vazia pela existência de exemplos construída por Giulietti e Korchmáros (aqui $q = t^3 > 8$). Por outro lado, uma descrição explícita de curvas com "muito pontos racionais" é de grande utilidade na Teoría de Códigos ou Geometrias Finitas por exemplo.

A guia desta palestra, basada em pesquisas em conjunto com S. Tafazolian, é a pergunta: Se $\mathcal{X}$ é uma curva plana (não singular) maximal sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{X}$ é recoberta por $\mathbf{F}_{q+1}$?

Assem consideramos "curvas de tipo Fermat" $u^d + v^d + 1 = 0$ e "curvas de tipo Hurwitz" $x^n y + y^n + x = 0$ como prototípos para uma possivel resposta à pergunta anterior.