

Influência da Alocação de Pólos Associados a Curvas Algébricas com $g = 2$ e $g = 1$ na Determinação de Grupos Fuchsianos

Erika Patricia Dantas de Oliveira Guazzi
Reginaldo Palazzo Junior

30 de Junho de 2017

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Alocação de Raízes
- 3 Equação Diferencial Fuchsiana Associada
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 4 Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano
- 5 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 2$
- 6 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 1$
- 7 Comparação entre os Grupos Fuchsianos
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 8 Conclusões

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Alocação de Raízes
- 3 Equação Diferencial Fuchsiana Associada
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 4 Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano
- 5 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 2$
- 6 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 1$
- 7 Comparação entre os Grupos Fuchsianos
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 8 Conclusões

Introdução

Alocação de Raízes

Equação Diferencial Fuchsiana Associada

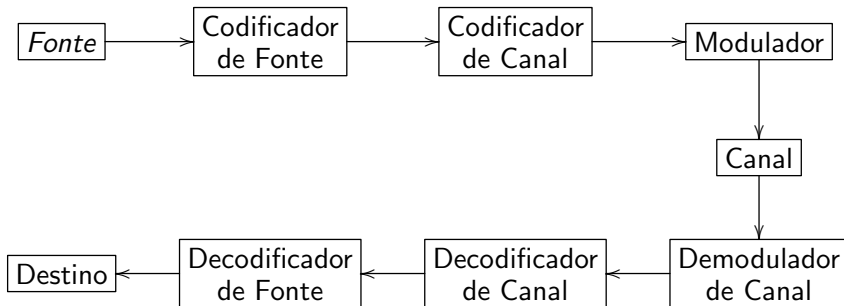
Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano

Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 2$

Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 1$

Comparação entre os Grupos Fuchsianos

Conclusões



Canal Discreto sem Memória

Grafo

Mergulho do Grafo/Canal

Determina-se os possíveis
gêneros da superfície

Escolha do gênero

Introdução

Alocação de Raízes

Equação Diferencial Fuchsiana Associada

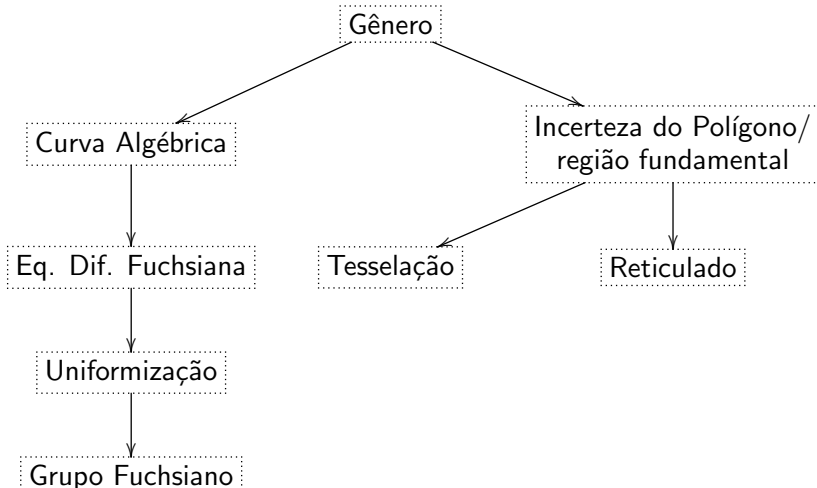
Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano

Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 2$

Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 1$

Comparação entre os Grupos Fuchsianos

Conclusões



Dentre os quatro modelos da Geometria Hipebólica, utilizou-se os modelos:

semi-plano superior $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$

disco unitário $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Ressalta-se que tais modelos são isométricos via a isometria

$$F(z) = \frac{(1+z)i}{1-z}.$$

O presente trabalho aborda:

- a influência da alocação das raízes de uma curva algébrica de $g = 2$ e $g = 1$ na determinação da região fundamental (grupo fuchsiano);
- se uma relação de similaridade entre curvas algébricas corresponde a um isomorfismo entre os respectivos grupos fuchsianos;
- apresenta um algoritmo para a obtenção dos geradores do grupo fuchsiano (usa-se o procedimento proposto por Whittaker, [4]. Generalizamos a proposta inicial apresentada em [3]);
- apresenta alguns exemplos de curvas algébricas de gênero 2 com grau 5 e de gênero 1 com grau 4;
- realiza a comparação entre os grupos fuchsianos obtidos nos exemplos.

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Alocação de Raízes
- 3 Equação Diferencial Fuchsiana Associada
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 4 Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano
- 5 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 2$
- 6 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 1$
- 7 Comparação entre os Grupos Fuchsianos
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 8 Conclusões

Os Teoremas a seguir estabelecem as condições para que os zeros de polinômios estejam limitados a uma região anular ou em $|z| \leq r$, $r > 0$.

TEOREMA 1

Sejam $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, onde $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$, um polinômio com coeficientes complexos, $M = \max_{\{0 \leq i \leq (n-1)\}} |a_i|$ e $M' = \max_{\{1 \leq i \leq n\}} |a_i|$. Então, todos os zeros de $P(z)$ satisfazem

$$\frac{|a_0|}{|a_0| + M'} < |z| < 1 + \frac{M}{|a_n|}$$

TEOREMA 2

Seja $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ um polinômio de grau n tal que $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$ e $a_0, a_n \neq 0$. Então, todos os zeros de $P(z)$ estão no disco determinado por

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

O Teorema de Eneström-Kakeya é uma consequência do Teorema 2 e é um clássico em termos da localização de zeros de polinômios.

TEOREMA 3 (ENESTRÖM-KAKEYA)

Seja $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ um polinômio cujos coeficientes reais a_i , $i = 0, \dots, n$, satisfazem

$a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_2 \geq a_1 \geq a_0 > 0$. Então, $P(z)$ não possui zeros em $|z| > 1$, ou seja, os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq 1$.

Observação

Pelas condições do Teorema de Eneström-Kakeya, segue que todos os zeros do polinômio $P(z)$ atingem a circunferência unitária se, e somente se, $a_i = 1$, $i = 0, \dots, n$.

Exemplo 1

Considere o polinômio

$$p(z) = 9z^5 + 7z^4 + 6z^3 + 5z^2 + 4z + 2.$$

Como esse polinômio satisfaz a hipótese do Teorema de Eneström-Kakeya, segue que todas as raízes estão em $|z| \leq 1$.

Com o auxílio do Software Scilab, obtemos as raízes

$$z_1 = 0.35 + 0.72i, \quad z_2 = -0.40 + 0.59i, \quad z_3 = -0.66, \quad z_4 = -0.40 - 0.59i$$

e $z_5 = 0.35 - 0.72i$.

Note que todas as raízes estão no interior de Δ .

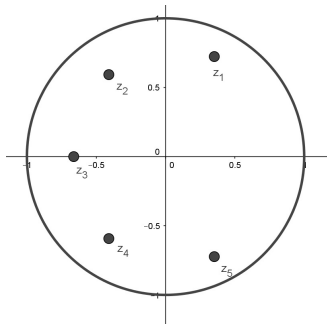


Figura: Raízes de $9z^5 + 7z^4 + 6z^3 + 5z^2 + 4z + 2 = 0$

Exemplo 1a

Considere o polinômio $p(z) = 5z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1$. Como esse polinômio satisfaz a hipótese do Teorema de Eneström-Kakeya, segue que todas as raízes estão em $|z| \leq 1$. Com o auxílio do Software Scilab, obtemos as raízes

$$z_1 = 0.14 + 0.68i, \quad z_2 = -0.54 + 0.36i, \quad z_3 = -0.54 - 0.36i \text{ e} \\ z_4 = 0.14 - 0.68i.$$

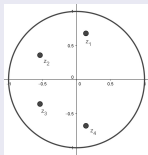


Figura: Raízes de $5z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0$

Particularmente, trabalhou-se com uma classe especial de polinômios conhecida por polinômios auto-recíprocos reais.

Definição

Considere o polinômio

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_n \neq 0 \quad \text{e} \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad k = 0, \dots, n$$

Diz-se que $P(z)$ é auto-recíproco se

$$P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right).$$

Em especial, o polinômio auto-recíproco a ser considerado tem a seguinte caracterização:

$$R_n^\lambda(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \cdots + z^{n-1}) + z^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

TEOREMA 4

Os zeros do polinômio

$$R_n^{(\lambda)}(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + z^n$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, de grau $n > 1$, estão em $|z| = 1$ se, e somente se,

- i) $-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2$ se n é par;
- ii) $-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{n-1}$ se n é ímpar.

Observação

Quando λ está fora dos intervalos especificados nos itens i) e ii) do Teorema 4, temos que $R_n^{(\lambda)}(z)$ apresenta dois zeros reais.

Exemplo 2

O polinômio

$$R_5^{(0)}(z) = z^5 + 1 = p_1(z)$$

possui suas raízes na fronteira do disco de raio unitário, ou seja, sobre a circunferência centrada na origem e raio 1, conforme o Teorema 4, pois $n = 5$ e $\lambda = 0$.

Com o auxílio do Software Scilab, obtemos as raízes

$$z_1 = 0.80 + 0.58i, z_2 = -0.30 + 0.95i, z_3 = -1, z_4 = -0.30 - 0.95i \text{ e } z_5 = 0.80 - 0.58i.$$

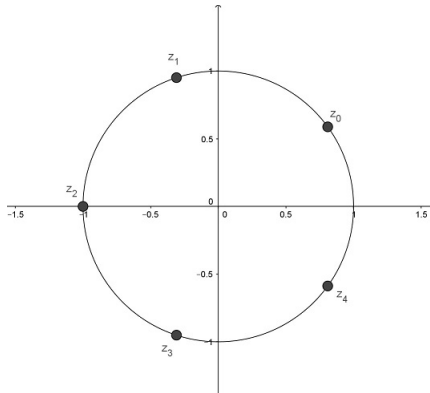


Figura: Raízes de $z^5 + 1 = 0$

Exemplo 2a

Considere o polinômio $p_1(z) = z^4 + 1 = R_4^{(1)}(z)$ possui suas raízes na fronteira do disco de raio unitário, ou seja, sobre a circunferência centrada na origem e raio 1, conforme o Teorema 4, pois $n = 4$ e $\lambda = 0$.

Com o auxílio do Software Scilab, obtemos as raízes

$$z_1 = -0.71 + 0.71i, \quad z_2 = -0.71 - 0.71i, \quad z_3 = 0.71 + 0.71i \text{ e} \\ z_4 = 0.71 - 0.71i.$$

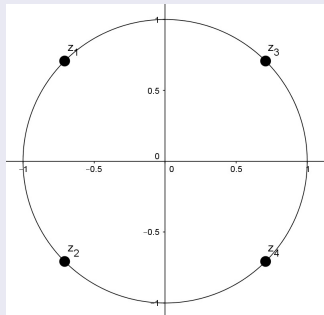


Figura: Raízes de $z^4 + 1 = 0$

Exemplo 3

Considere o polinômio

$$p_2(z) = R_5^{(1)} = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

O Teorema 4 garante que $p_2(z)$ possui suas raízes na fronteira de Δ .

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra o polinômio tem 5 raízes, a saber, $z_1 = 0.5 + 0.86i$, $z_2 = -0.5 + 0.86i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -0.5 - 0.86i$, $z_5 = 0.5 - 0.86i$.

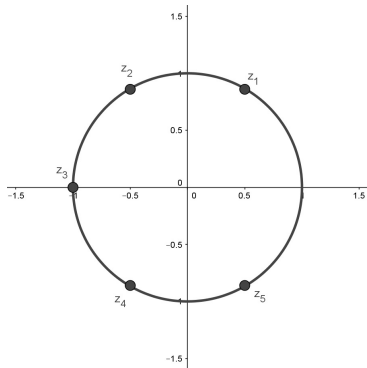


Figura: Raízes de $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

Exemplo 3a

Considere o polinômio $p_2(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = R_4^{(1)}$. O

Teorema 4 garante que $p_2(z)$ possui suas raízes, $z_1 = 0.31 + 0.95i$, $z_2 = -0.81 + 0.59i$, $z_3 = -0.81 - 0.59i$, $z_4 = 0.31 - 0.95i$, na fronteira de Δ .

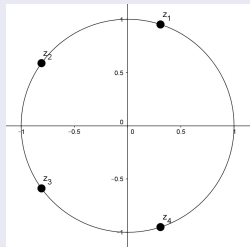


Figura: Raízes de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Alocação de Raízes
- 3 Equação Diferencial Fuchsiana Associada
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 4 Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano
- 5 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 2$
- 6 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 1$
- 7 Comparação entre os Grupos Fuchsianos
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 8 Conclusões

Definição

Uma equação diferencial

$$\ddot{y}(z) + p(z)\dot{y}(z) + q(z)y(z) = 0$$

é dita fuchsiana se os polos de $p(z)$ são de ordem no máximo 1 e os polos de $q(z)$ são no máximo 2.

Em [2] apresentam-se condições explícitas para a obtenção de tal equação diferencial dado que se conhecem as singularidades e, consequentemente, a curva algébrica associada, a saber,

$$p(z) = \frac{A_1}{z - z_1} + \dots + \frac{A_n}{z - z_n} + k_1$$

e

$$q(z) = \frac{B_1}{(z - z_1)^2} + \frac{C_1}{z - z_1} \dots + \frac{B_n}{(z - z_1)^2} + \frac{C_n}{z - z_1} + k_1$$

onde

$$\begin{cases} A_1 + \dots + A_n = 2 \\ C_1 + \dots + C_n = 0 \\ B_1 + \dots + B_n + z_1 C_1 + \dots + z_n C_n = 0 \\ 2z_1 B_1 + \dots + 2z_n B_n + z_1^2 C_1 + \dots + z_n^2 C_n = 0 \end{cases}$$

Faz-se uso do software Scilab na resolução de tal sistema, a fim de determinar as expressões $p(z)$ e $q(z)$.

Exemplo 4

Dada a curva algébrica

$$y^2 = z^5 + 1$$

e seguindo o processo, apresentado acima, obtém-se que

$$f_0(z)y''(z) + f_1(z)y'(z) + f_2(z)y(z) = 0$$

é a equação diferencial fuchsiana associada a curva dada, onde

$$f_0(z) = z^5 + 1,$$

$$f_1(z) = 2(z - 0.80 - 0.58i)(z + 0.30 - 0.95i)(z + 1)(z + 0.80 + 0.58i) + k_1(z^5 + 1)$$

$$\text{e } f_2(z) = k_2(z^5 + 1).$$

Exemplo 5

Dado

$$y^2 = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

o processo acima fornece

$$g_0(z)y''(z) + g_1(z)y'(z) + g_2(z)y(z) = 0$$

como a equação diferencial fuchsiana associada, onde

$$g_0(z) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

$$g_1(z) = 2(z - 0.50 - 0.86i)(z + 0.50 - 0.86i)(z - 1)(z + 0.50 + 0.86i) \\ + k_1(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

$$\text{e } g_2(z) = k_2(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$

Exemplo 6

Agora, munido da curva algébrica

$$y^2 = 9z^5 + 7z^4 + 6z^3 + 5z^2 + 4z + 2$$

obtemos que a equação diferencial fuchsiana associada é

$$h_0(z)y''(z) + h_1(z)y'(z) + h_2(z)y(z) = 0$$

onde

$$h_0(z) = (9z^5 + 7z^4 + 6z^3 + 5z^2 + 4z + 2),$$

$$h_1(z) = 2\delta + k_1(9z^5 + 7z^4 + 6z^3 + 5z^2 + 4z + 2)$$

$$\text{e } h_2(z) = k_2(9z^5 + 7z^4 + 6z^3 + 5z^2 + 4z + 2).$$

Note que

$$\delta = (z - 0.35 - 0.72i)(z + 0.40 - 0.59i)(z + 0.40 + 0.59i)(z - 0.35 + 0.72i).$$

Exemplo 4a

Dada a curva algébrica $y^2 = z^4 + 1$ e seguindo o processo, apresentado acima, para determinar a equação diferencial fuchsiana, obtém-se que

$$n_0(z)y''(z) + n_1(z)y'(z) + n_2(z)y(z) = 0$$

é a equação diferencial fuchsiana associada a curva dada, onde $n_0(z) = z^4 + 1$,

$$n_1(z) = 2(z + 0.71 - 0.71i)(z + 0.71 + 0.71i)(z - 0.71 + 0.71i) + k_1(z^4 + 1)$$

e $n_2(z) = k_2(z^4 + 1)$.

Exemplo 5a

Associada à curva algébrica $y^2 = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, o processo acima fornece

$$m_0(z)y''(z) + m_1(z)y'(z) + m_2(z)y(z) = 0$$

é a equação diferencial fuchsiana associada a curva dada, onde

$$m_0(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

$$m_1(z) = 2(z - 0.31 - 0.95i)(z + 0.81 - 0.59i)(z + 0.81 + 0.59i) \\ + k_1(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

$$\text{e } m_2(z) = k_2(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$

Exemplo 6a

Munido da curva algébrica $y^2 = 5z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1$, para determinar a equação diferencial fuchsiana associada, faz-se uso do processo apresentado em Barata 2005. Daí, obtem-se que

$$h_0(z)y''(z) + h_1(z)y'(z) + h_2(z)y(z) = 0$$

é a equação diferencial fuchsiana associada a curva algébrica dada, onde

$$h_0(z) = 5z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1,$$

$$h_1(z) = [2(z - 0.14 - 0.69i)(z + 0.54 - 0.36i)(z - 0.14 + 0.68i) + k_1(5z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1)],$$

$$\text{e } h_2(z) = k_2(5z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1).$$

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Alocação de Raízes
- 3 Equação Diferencial Fuchsiana Associada
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 4 Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano**
- 5 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 2$
- 6 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 1$
- 7 Comparação entre os Grupos Fuchsianos
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 8 Conclusões

Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano

- 1 Determinar as raízes da curva algébrica em Δ e em \mathbb{H}^2 ;
- 2 Construir o polígono formado pelas raízes em \mathbb{H}^2 ;
- 3 Para cada lado do polígono hiperbólico, determinar a transformação elíptica, $S_i = \frac{az+b}{cz+d}$, com $ad - bc \neq 0$ e $|tr(S_i)| < 2$;
- 4 Verificar se $S_i * S_j = Id$;
 - Caso $S_i * S_j \neq Id$, normalizar S_i e denote S_i normalizado por N_i ;
- 5 Fixar uma das transformações elípticas, por exemplo N_i , e calcular os produtos $N_i * N_j$, para todo $j \neq i$;
- 6 Verificar se as transformações $N_i * N_j$ são hiperbólicas, isto é, $|tr(N_i * N_j)| > 2$, com i fixo e para todo $j \neq i$;
- 7 Os geradores do grupo fuchsiano são especificados por $\{N_i * N_j\}$.

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Alocação de Raízes
- 3 Equação Diferencial Fuchsiana Associada
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 4 Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano
- 5 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 2$**
- 6 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 1$
- 7 Comparação entre os Grupos Fuchsianos
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 8 Conclusões

Exemplo 7

Considere o polinômio

$$p_1(z) = R_5^{(0)} = z^5 + 1$$

Como já visto, as suas cinco raízes estão na fronteira de Δ . E mais, tais singularidades formam um polígono regular. Essas raízes em Δ podem ser conduzidas ao semiplano superior \mathbb{H}^2 mediante a utilização da isometria

$$F(z) = \frac{(1+z)i}{1-z}.$$

Os valores das singularidades em \mathbb{H}^2 são:

$$F(0.80 + 0.58i) = -3.07;$$

$$F(-0.30 + 0.95i) = -0.72;$$

$$F(-1) = 0;$$

$$F(-0.30 - 0.95i) = 0.72;$$

$$F(0.80 - 0.58i) = 3.07.$$

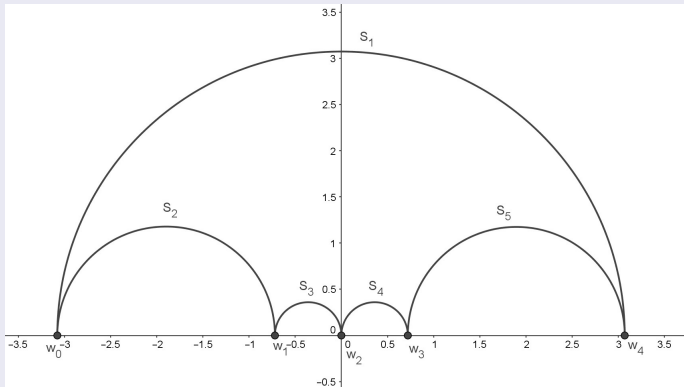


Figura: Raízes de $z^5 + 1 = 0$ em \mathbb{H}^2

Para determinar, por exemplo, a transformação de Möbius elíptica que passa pelos pontos $w_1 = -3.07$ e $w_5 = 3.07$ é necessário determinar a única geodésica que passa pelos pontos dados, e em seguida determinar o seu ponto médio, a saber, $m_{15} = 3.07i$. Uma vez que a transformação deve ser elíptica, considera-se a seguinte relação entre os três pontos, w_1 , w_5 e m_1 :

$$w_1 \rightarrow w_5, \quad m_{15} \rightarrow m_{15}, \quad w_5 \rightarrow w_1.$$

Agora, utiliza-se a relação cruzada para tais pontos e suas respectivas imagens:

$$\left(\frac{w + 3.07}{w - 3.07}\right) \left(\frac{3.07i + 3.07}{3.07i - 3.07}\right) = \left(\frac{z - 3.07}{z + 3.07}\right) \left(\frac{3.07i - 3.07}{3.07i + 3.07}\right),$$

conduzindo a

$$w = S_1(z) = -\frac{355.31}{37.69z}.$$

De modo análogo, obtemos as outras transformações, a saber,

$$S_1(z) = -\frac{355.31}{37.69z}, \quad S_2(z) = \frac{-8.46z + (-12.40 + 12.25i)}{(8.90 + 5.54i)z + 8.46},$$

$$S_3(z) = \frac{-0.09z - 0.06}{(0.51 + 0.51i)z + 0.09}, \quad S_4(z) = \frac{-0.09z + 0.06}{(-0.51 + 0.51i)z + 0.09},$$

$$S_5(z) = \frac{-8.46z + (12.4 + 12.25i)}{(-8.9 + 5.54i)z + 8.46}.$$

As expressões das respectivas geodésicas são transformações elípticas e formam a Figura.

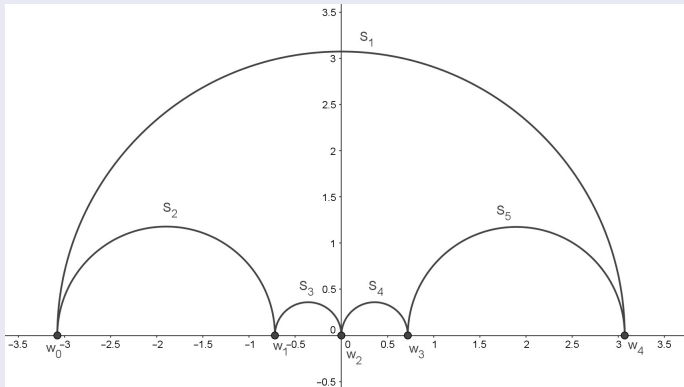


Figura: Raízes de $z^5 + 1 = 0$ em \mathbb{H}^2

Assim, ao multiplicar cada transformação S_i , $i = 1, \dots, 5$, por

$$\sqrt{\frac{1}{(S_i * S_i)(1, 1)}},$$

respectivamente, obtemos as transformações normalizadas, denotadas por N_i , ou seja,

$$N_i = \sqrt{\frac{1}{(S_i * S_i)(1, 1)}} * S_i, \quad i = 1, \dots, 5,$$

a saber,

$$N_1(z) = -\frac{3.07}{0.33z},$$

$$N_2(z) = \frac{(-0.14 + 0.77i)z + (0.91 + 1.34i)}{(0.66 - 0.72i)z + (0.14 - 0.77i)},$$

$$N_3(z) = \frac{(-0.20 - 0.41i)z + (-0.13 - 0.27i)}{(-1.15 + 3.51i)z + (0.20 + 0.41i)},$$

$$N_4(z) = \frac{(-0.20 + 0.41i)z + (0.13 - 0.27i)}{(1.15 + 3.51i)z + (0.20 - 0.41i)},$$

$$N_5(z) = \frac{(-0.14 - 0.77i)z + (-0.91 + 1.34i)}{(-0.66 - 0.72i)z + (0.14 + 0.77i)}.$$

Em seguida, fixa-se uma das transformações, por exemplo, N_1 , o que resulta em $N_1 N_2$, $N_1 N_3$, $N_1 N_4$ e $N_1 N_5$, bem como a verificação que tais produtos são transformações hiperbólicas, ou seja, $|tr(N_1 * N_j)| > 2$, $j = 2, 3, 4, 5$.

Assim, os produtos acima são os geradores do grupo fuchsiano

$$G_1 = \langle N_1 N_2, N_1 N_3, N_1 N_4, N_1 N_5 \rangle,$$

onde

$$N_1 N_2 = \frac{(-2.23 - 2.02i)z + (-2.39 - 0.43i)}{(-0.25 - 0.04i)z + (-0.43 + 0.29i)},$$

$$N_1 N_3 = \frac{(10.79 + 3.54i)z + (1.26 - 0.64i)}{(0.13 - 0.06i)z + (0.08 - 0.04i)},$$

$$N_1 N_4 = \frac{(10.79 - 3.54i)z + (-1.26 - 0.64i)}{(-0.13 - 0.06i)z + (0.08 + 0.04i)},$$

$$N_1 N_5 = \frac{(-2.23 + 2.02i)z + (2.39 - 0.43i)}{(0.25 - 0.04i)z + (-0.43 - 0.29i)}.$$

Exemplo 8

Considere o polinômio

$$p_2(z) = R_5^{(1)} = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

Procedendo como no exemplo acima, obtemos os geradores do grupo fuchsiano G_2 , dado por

$$G_2 = \langle M_1 M_2, \quad M_1 M_3, \quad M_1 M_4, \quad M_1 M_5 \rangle,$$

onde

$$M_1 M_2 = \frac{(-1.81 - 2.39i)z + (-1.38 - 0.68i)}{(-0.46 - 0.22i)z + (-0.46 + 0.26i)},$$

$$M_1 M_3 = \frac{(8.32 + 2.85i)z + (0.68 - 0.34i)}{(0.22 - 0.11i)z + (0.11 - 0.05i)},$$

$$M_1 M_4 = \frac{(8.32 - 2.85i)z + (-0.68 - 0.34i)}{(-0.22 - 0.11i)z + (0.11 + 0.05i)},$$

$$M_1 M_5 = \frac{(-1.81 + 2.39i)z + (1.38 - 0.68i)}{(0.46 - 0.22i)z + (-0.46 - 0.26i)}.$$

Exemplo 9

Recorde que as raízes do polinômio

$$p(z) = 9z^5 + 7z^4 + 6z^3 + 5z^2 + 4z + 2,$$

encontram-se no interior de Δ . Obtém-se que o polígono formado, cujos vértices são as raízes, é não regular. Procedendo como no exemplo acima, obtemos os geradores do grupo fuchsiano

$$G_3 = \langle L_1L_2, \quad L_1L_3, \quad L_1L_4, \quad L_1L_5 \rangle,$$

onde

$$L_1 L_2 = \frac{(2.63 + 0.41i)z + (2.79 + 0.42i)}{(1.13 + 0.17i)z + (1.57 + 0.12i)},$$

$$L_1 L_3 = \frac{(4.88 + 0.04i)z + (1.23 - 0.03i)}{(0.50 + 0.0039i)z + (0.33 - 0.004i)},$$

$$L_1 L_3 = \frac{(4.88 - 0.04i)z + (-1.23 - 0.025i)}{(-0.50 + 0.003i)z + (0.33 + 0.004i)},$$

$$L_1 L_5 = \frac{(2.63 - 0.41i)z + (-2.79 + 0.42i)}{(-1.13 + 0.17i)z + (1.57 - 0.12i)}.$$

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Alocação de Raízes
- 3 Equação Diferencial Fuchsiana Associada
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 4 Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano
- 5 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 2$
- 6 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 1$**
- 7 Comparação entre os Grupos Fuchsianos
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 8 Conclusões

Exemplo 7a

Considere o polinômio $p_1(z) = z^4 + 1$, cujas raízes $z_1 = -0.71 + 0.71i$, $z_2 = -0.71 - 0.71i$, $z_3 = 0.71 + 0.71i$ e $z_4 = 0.71 - 0.71i$ estão na fronteira do disco de raio unitário. E mais, tais singularidades formam um polígono regular.

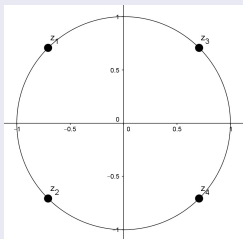


Figura: Raízes de $z^4 + 1 = 0$

Os valores das singularidades em \mathbb{H}^2 são:

$$F(z_1) = -0.41;$$

$$F(z_2) = 0.41;$$

$$F(z_3) = -2.41;$$

$$F(z_4) = 2.41.$$

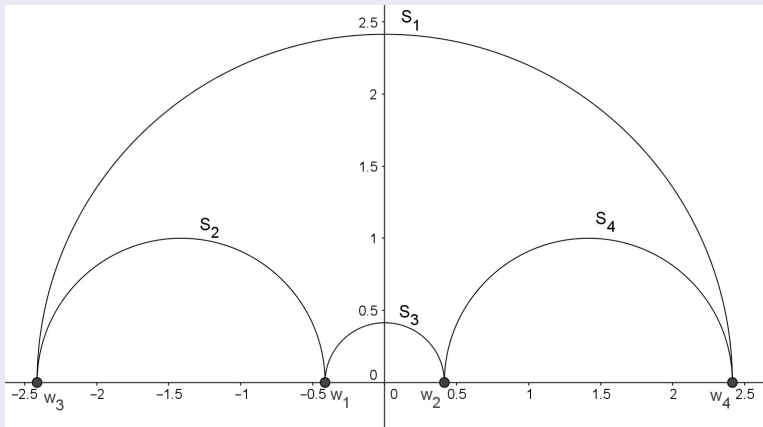


Figura: Raízes de $z^4 + 1 = 0$ em \mathbb{H}^2

Para determinar, por exemplo, a transformação de Möbius elíptica que passa pelos pontos $w_1 = -0.41$ e $w_2 = 0.41$ é preciso determinar a única geodésica que passa pelos pontos dados e, em seguida, determinar o seu ponto médio, a saber, $m_3 = 0.41i$. Uma vez que a transformação deve ser elíptica, considera-se a seguinte relação entre os três pontos, w_1 , w_2 e m_3 :

$$w_1 \rightarrow w_2, \quad m_3 \rightarrow m_3, \quad w_2 \rightarrow w_1.$$

Agora, utiliza-se a relação cruzada para tais pontos e suas respectivas imagens:

$$\frac{w + 0.41}{w - 0.41} \frac{0.41i - 0.41}{0.41i + 0.41} = \frac{z - 0.41}{z + 0.41} \frac{0.41i - 0.41}{0.41i + 0.41}$$

conduzindo a $w = S_3(z) = \frac{-0.12}{0.69z}$.

De modo análogo, obtemos as outras transformações, a saber,

$$S_1(z) = \frac{-135.87}{23.31z}, \quad S_2(z) = \frac{-5.66iz - 11.99i}{4iz + 5.66i},$$

$$S_3(z) = \frac{-0.12}{0.69z}, \quad S_4(z) = \frac{5.66iz - 11.99i}{4iz - 5.66i}.$$

As expressões das respectivas geodésicas são transformações elípticas e formam a Figura.

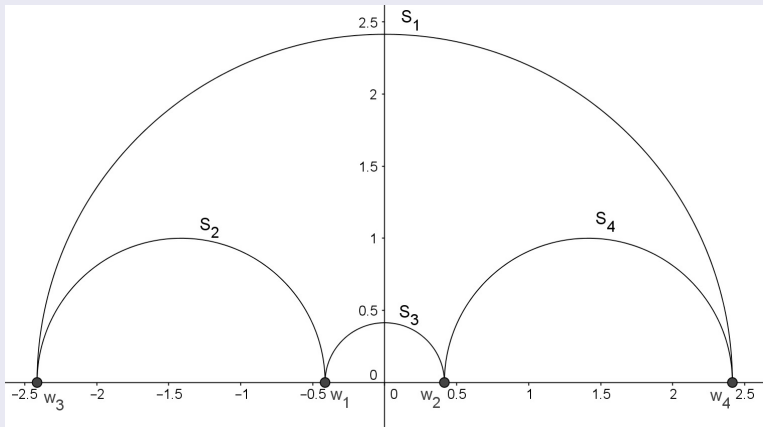


Figura: Raízes de $z^4 + 1 = 0$ em \mathbb{H}^2

Assim, ao multiplicar cada transformação S_i , $i = 1, \dots, 4$, por

$$\sqrt{\frac{1}{(S_i * S_i)(1, 1)'}}$$

respectivamente, obtemos as transformações normalizadas, denotadas por N_i , ou seja,

$$N_i = \sqrt{\frac{1}{(S_i * S_i)(1, 1)'}} * S_i, \quad i = 1, \dots, 4,$$

a saber,

$$N_1(z) = \frac{-2.41i}{0.41iz},$$

$$N_2(z) = \frac{-1.41iz - 2.99i}{1.00iz + 1.41i},$$

$$N_3(z) = \frac{-0.41i}{2.41iz},$$

$$N_4(z) = \frac{1.41iz - 2.99i}{1.00iz - 1.41i}.$$

Em seguida, fixa-se uma das transformações, por exemplo, N_1 , o que resulta em $N_1 N_2$, $N_1 N_3$ e $N_1 N_4$, bem como a verificação que tais produtos são transformações hiperbólicas, ou seja, $|tr(N_1 * N_j)| > 2$, $j = 2, 3, 4$.

Assim, os produtos acima são os geradores do grupo fuchsiano

$$G_1 = \langle N_1 N_2, \quad N_1 N_3, \quad N_1 N_4 \rangle,$$

onde

$$N_1 N_2 = \frac{2.41z + 3.41}{0.59z + 1.24},$$

$$N_1 N_3 = \frac{5.83z}{0.17},$$

$$N_1 N_4 = \frac{2.41z - 3.41}{-0.59z + 1.24}.$$

Exemplo 8a

Considere o polinômio $p_2(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, cujas raízes $z_1 = 0.31 + 0.95i$, $z_2 = -0.81 + 0.59i$, $z_3 = -0.81 - 0.59i$, $z_4 = 0.31 - 0.95i$ estão sobre a fronteira de Δ . Observa-se que, diferentemente do exemplo acima, tais raízes não formam um polígono regular.

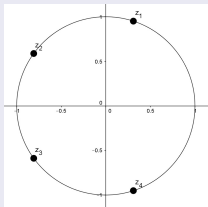


Figura: Raízes de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

Procedendo como no exemplo acima, obtemos os geradores do grupo fuchsiano G_2 , dado por

$$G_2 = \langle M_1 M_2, \quad M_1 M_3, \quad M_1 M_4 \rangle,$$

onde

$$M_1 M_2 = \frac{(-1.81 - 2.39i)z + (-1.38 - 0.68i)}{(-0.46 - 0.22i)z + (-0.46 + 0.26i)},$$

$$M_1 M_3 = \frac{(8.32 + 2.85i)z + (0.68 - 0.34i)}{(0.22 - 0.11i)z + (0.11 - 0.05i)},$$

$$M_1 M_4 = \frac{(8.32 - 2.85i)z + (-0.68 - 0.34i)}{(-0.22 - 0.11i)z + (0.11 + 0.05i)},$$

$$(-1.81 + 2.39i)z + (1.38 - 0.68i)$$

Exemplo 9a

Considere o polinômio $p(z) = 5z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1$, cujas raízes $z_1 = 0.14 + 0.68i$, $z_2 = -0.54 + 0.36i$, $z_3 = -0.54 - 0.36i$ e $z_4 = 0.14 - 0.68i$ estão no interior de Δ . Observa-se ainda que tais singularidades são os vértices de um polígono não regular.

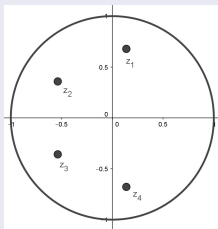


Figura: Raízes de $5z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0$

Procedendo como no exemplo acima, obtemos os geradores do grupo fuchsiano

$$G_3 = \langle L_1L_2, \quad L_1L_3, \quad L_1L_4, \quad L_1L_5 \rangle,$$

onde

$$L_1L_2 = \frac{(2.63 + 0.41i)z + (2.79 + 0.42i)}{(1.13 + 0.17i)z + (1.57 + 0.12i)},$$

$$L_1L_3 = \frac{(4.88 + 0.04i)z + (1.23 - 0.03i)}{(0.50 + 0.0039i)z + (0.33 - 0.004i)},$$

$$L_1L_4 = \frac{(4.88 - 0.04i)z + (-1.23 - 0.025i)}{(-0.50 + 0.003i)z + (0.33 + 0.004i)},$$

$$(2.63 - 0.41i)z + (-2.79 + 0.42i)$$

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Alocação de Raízes
- 3 Equação Diferencial Fuchsiana Associada
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 4 Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano
- 5 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 2$
- 6 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 1$
- 7 Comparação entre os Grupos Fuchsianos
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 8 Conclusões

Primeiramente recorda-se que duas transformações A e B são equivalentes se, e somente se, existe uma transformação C tal que

$$A = CBC^{-1}.$$

E mais, dados $G = \langle A_1, A_2 \rangle$ e $H = \langle B_1, B_2 \rangle$ dois grupos fuchsianos afirma-se que eles são equivalentes se for possível apresentar uma transformação C que satisfaz $A_1 = CB_1C^{-1}$ e $A_2 = CB_2C^{-1}$ ou $A_1 = CB_2C^{-1}$ e $A_2 = CB_1C^{-1}$.

Exemplo 10

Considere os grupos fuchsianos

$$G_1 = \langle N_1 N_2, N_1 N_3, N_1 N_4, N_1 N_5 \rangle$$

e

$$G_2 = \langle M_1 M_2, M_1 M_3, M_1 M_4, M_1 M_5 \rangle$$

associados às curvas algébricas $R_5^{(0)} = z^5 + 1$ e

$R_5^{(1)} = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, respectivamente.

Tais grupos são equivalentes se $\exists C$ não nula, tal que $A_i = C B_j C^{-1}$, com $A_i \in G_1$ e $B_j \in G_2$.

Assim, inicia-se a procura da transformação C mediante a fixação do gerador $N_1 N_2$. Em seguida, ao supor que existe tal transformação C , calcula-se:

$$N_1 N_2 = C(M_1 M_2)C^{-1} \text{ que fornece } C = 0.$$

$$N_1 N_2 = C(M_1 M_3)C^{-1} \text{ que novamente fornece } C = 0$$

$$N_1 N_2 = C(M_1 M_4)C^{-1} \text{ cujos cálculos fornecem } C = 0$$

$$N_1 N_2 = C(M_1 M_5)C^{-1} \text{ novamente a obtenção é de } C = 0$$

Logo, visualiza-se a não equivalência de $N_1 N_2$ com qualquer um dos geradores do segundo grupo, G_2 .

É possível concluir, portanto, que não existe isomorfismo entre os grupos fuchsianos G_1 e G_2 .

Exemplo 11

Considere os grupos fuchsianos

$$G_1 = \langle N_1 N_2, N_1 N_3, N_1 N_4, N_1 N_5 \rangle$$

e

$$G_3 = \langle L_1 L_2, L_1 L_3, L_1 L_4, L_1 L_5 \rangle$$

associados às curvas algébricas $R_5^{(0)} = z^5 + 1$ e

$p(z) = 9z^5 + 7z^4 + 6z^3 + 5z^2 + 4z + 2$, respectivamente.

Procedendo como no exemplo acima, exhibe-se a não equivalência de $N_1 N_2$ com qualquer um dos geradores do segundo grupo, G_3 . Logo, tem-se a não existência de equivalência entre os grupos fuchsianos G_1 e G_3 .

Exemplo 12

Considere os grupos fuchsianos

$$G_2 = \langle M_1 M_2, M_1 M_3, M_1 M_4, M_1 M_5 \rangle$$

e

$$G_3 = \langle L_1 L_2, L_1 L_3, L_1 L_4, L_1 L_5 \rangle$$

associados as curvas algébricas $R_5^{(1)} = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ e $p(z) = 9z^5 + 7z^4 + 6z^3 + 5z^2 + 4z + 2$, respectivamente.

Procedendo de forma analoga aos exemplos acima, obtem-se que $M_1 M_2$ não é equivalente a nenhum dos geradores do segundo grupo, G_3 . Consequentemente, segue a não existência de equivalência entre os grupos fuchsianos G_2 e G_3 .

Introdução

Alocação de Raízes

Equação Diferencial Fuchsiana Associada

Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano

Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 2$

Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 1$

Comparação entre os Grupos Fuchsianos

Conclusões

$g = 2$

$g = 1$

Desta forma, verifica-se, a partir dos casos apresentados, que os grupos fuchsianos não apresentam nenhuma relação de equivalência entre eles.

Exemplo 10a

Considere os grupos fuchsianos

$$G_1 = \langle N_1 N_2, N_1 N_3, N_1 N_4 \rangle$$

e

$$G_2 = \langle M_1 M_2, M_1 M_3, M_1 M_4 \rangle$$

associados às curvas algébricas $R_4^{(0)} = z^4 + 1$ e

$R_5^{(1)} = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, respectivamente.

Tais grupos são equivalentes se $\exists C$ não nula, tal que $A_i = C B_j C^{-1}$, com $A_i \in G_1$ e $B_j \in G_2$.

Assim, inicia-se a procura da transformação C mediante a fixação do gerador $N_1 N_2$. Em seguida, ao supor que existe tal transformação C , calcula-se:

$$N_1 N_2 = C(M_1 M_2)C^{-1} \text{ que fornece } C = 0.$$

$$N_1 N_2 = C(M_1 M_3)C^{-1} \text{ que novamente fornece } C = 0$$

$$N_1 N_2 = C(M_1 M_4)C^{-1} \text{ cujos cálculos fornecem } C = 0$$

Logo, visualiza-se a não equivalência de $N_1 N_2$ com qualquer um dos geradores do segundo grupo, G_2 .

É possível concluir, portanto, que não existe isomorfismo entre os grupos fuchsianos G_1 e G_2 .

Exemplo 11a

Considere os grupos fuchsianos

$$G_1 = \langle N_1 N_2, N_1 N_3, N_1 N_4 \rangle$$

e

$$G_3 = \langle L_1 L_2, L_1 L_3, L_1 L_4 \rangle$$

associados às curvas algébricas $R_4^{(0)} = z^4 + 1$ e $p(z) = 5z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1$, respectivamente.

Procedendo como no exemplo acima, exhibe-se a não equivalência de $N_1 N_2$ com qualquer um dos geradores do segundo grupo, G_3 . Logo, tem-se a não existência de equivalência entre os grupos fuchsianos G_1 e G_3 .

Exemplo 12a

Considere os grupos fuchsianos

$$G_2 = \langle M_1 M_2, M_1 M_3, M_1 M_4 \rangle$$

e

$$G_3 = \langle L_1 L_2, L_1 L_3, L_1 L_4 \rangle$$

associados as curvas algébricas $R_4^{(1)} = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ e $p(z) = 5z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1$, respectivamente.

Procedendo de forma analoga aos exemplos acima, obtem-se que $M_1 M_2$ não é equivalente a nenhum dos geradores do segundo grupo, G_3 . Consequentemente, segue a não existência de equivalência entre os grupos fuchsianos G_2 e G_3 .

Introdução

Alocação de Raízes

Equação Diferencial Fuchsiana Associada

Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano

Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 2$

Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 1$

Comparação entre os Grupos Fuchsianos

Conclusões

$g = 2$

$g = 1$

Desta forma, verifica-se, a partir dos casos apresentados, que os grupos fuchsianos não apresentam nenhuma relação de equivalência entre eles.

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Alocação de Raízes
- 3 Equação Diferencial Fuchsiana Associada
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 4 Algoritmo para Obtenção do Grupo Fuchsiano
- 5 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 2$
- 6 Grupos Fuchsianos Relacionados a Curvas Algébricas de $g = 1$
- 7 Comparação entre os Grupos Fuchsianos
 - $g = 2$
 - $g = 1$
- 8 Conclusões

Diante do exposto podemos concluir:





- os grupos fuchsianos associados a curvas algébricas não são equivalentes;
- equações diferenciais associados a curvas algébricas são distintas;
- o mesmo número de singularidades não levam a grupos fuchsianos isomorfos.

Assim, obtemos o Lema:

Lema

Dadas curvas algébricas de mesmo grau, existe um isomorfismo entre as singularidades associadas. Entretanto, não existe isomorfismo entre os respectivos grupos Fuchsianos.

Referências

-  J. W. Anderson. *Hyperbolic Geometry*. In *Springer Undergraduate Mathematics Series*. Springer, 2008.
-  J. C. A. Barata. *Notas para um Curso de Física-Matemática*. São Paulo, Brasil.
-  A. J. Oliveira, Uniformização de Curvas Algébricas Associadas a Sequências de Farey Através de Equações Diferenciais Fuchsianas na Proposta de Novos Sistemas de Comunicação, Tese de Doutorado, Unicamp, 2017.
-  J. M. Whittaker, The uniformisation of algebraic curves, *Journal of the London Mathematical Society.*, 1930.