(Outubro 1998)

SUBCONJUNTO DA PRODUÇÃO CIENTÍFICA: CONTRIBUÇÕES EM CURVAS SOBRE CORPOS FINITOS

FERNANDO TORRES

Nas últimas decadas tem ocorrído um aumento no interesse do estudo das curvas sobre corpos finitos $\mathbb{F}$ com um número "grande" de pontos $\mathbb{F}$-racionais. Isto se deve principalmente a importantes aplicações destas curvas à Teoria de Códigos [Go], [Tsf-Vl], à Teoria dos Números [Mo], [Ste] e à teoria de Geometrias Finitas [H], [Se]. De fato, varios problemas nestas áreas tem formulações equivalentes.

Seja $\mathcal{X}$ uma curva algébrica projetiva geometricamente irretível definida sobre $\bar{\mathbb{F}}$, o fecho algebrico de um corpo finito $\mathbb{F} = \mathbb{F}_\ell$ com ℓ elementos. Suponha que $\mathcal{X}$ é equipada com o morfismo de Frobenius relativo a $\mathbb{F}_\ell$ (ou equivalentemente, que $\mathcal{X}$ é definida sobre $\mathbb{F}_\ell$). Muitas propriedades aritméticas e geométricas de $\mathcal{X}$ estão "codificadas e escondidas" na sua função -zeta. Em particular, o número $\#\mathcal{X}(\mathbb{F}_\ell)$ de pontos $\mathbb{F}_\ell$-racionais de $\mathcal{X}$ pode ser calculado através dele. Sem $\mathcal{X}$ é não singular, temos o famoso Teorema de Hasse-Weil sobre a hipótese de Riemann para curvas sobre corpos finitos [W] que implica a chamada cota de Hasse-Weil para $\#\mathcal{X}(\mathbb{F}_\ell)$, a saber

$$|\#\mathcal{X}(\mathbb{F}_\ell) - (\ell + 1)| \leq 2g\sqrt{\ell}\,,$$

onde g é o gênero de $\mathcal{X}$. Se $\mathcal{X}$ é singular, a cota anterior ainda é valida se substituimos g pelo gênero aritmético de $\mathcal{X}$, veja [S, Section 4], [Au-Pe, Corollary 2.4], [LY], e [Bach].

No que segue, por uma curva entendáse uma curva alg/'ebrica projetiva geometricamente irredutível e não singular, definida sobre um corpo finito.

Uma curva sobre $\mathbb{F}_\ell$ é dita $\mathbb{F}_\ell$-*maximal* se o seu número de pontos racionais atinge a cota superior de Hasse-Weil.

O objetivo destas notas é reportar resultados aritméticos e geométricos de curvas $\mathbb{F}_\ell$-maximais obtidos pelo autor e colaboradores (M. Abdón, A. Cossidente, A. Garcia, J.W.P. Hirschfeld and G. Korchmáros) nos seguintes artigos: [FT1], [FGT], [FT2], [GT], [CHKT], [CKT1], [CKT2], e [Ab-T]. O método desenvolvido consiste em aproveitar a forma especial da $\mathbb{F}_\ell$-série linear associada à curva $\mathbb{F}_\ell$-maximal (definida em [FGT, p. 33]), usando para isto o artigo fundamental de Stöhr-Voloch [SV], e usando a clássica fórmula de Castelnuovo para curvas em espaços projetivos. Entre os problemas considerados nestas pesquisas temos,

(P1) O espectro dos gêneros de curvas $\mathbb{F}_\ell$-maximais, e

(P2) Para uma curva $\mathbb{F}_\ell$-maximal $\mathcal{X}$, o cálculo do conjunto

$$[\mathcal{X}] := \{\mathcal{Y} : \mathcal{Y}\ \mathbb{F}_\ell\text{-isomorfo a } \mathcal{X}\}\,,$$

assim como o calculo de um modelo plano sobre $\mathbb{F}_\ell$ para cada $\mathcal{Y} \in [\mathcal{X}]$.

Seja $\mathcal{X}$ uma curva $\mathbb{F}_\ell$-maximal de gênero g. Logo, necessariamente, ℓ deve ser um quadrado, digamos $\ell = q^2$. Logo Ihara [Ih] observo que g nãopode ser maior que $q(q-1)/2$. Resulta que esta cota é a melhor possivel pois a curva Hermitiana $\mathcal{H}$

$$Y^qZ + YZ^q = X^{q+1}\,,$$

é $\mathbb{F}_{q^2}$-maximal e tem gênero $q(q-1)/2$. Mais ainda, temos $\#[\mathcal{H}] = 1$ o que foi provado por Rüch and Stichtenoth [R-Sti]. Assim, temos uma resposta parcial ao Problema 1 e a solução do Problema 2 para a curva Hermitiana. Agora, usando um resultado de Lachaud, [La, Proposition 6], temos que todas as curvas $\mathbb{F}_{q^2}$-cobertas pela Hermitiana são também $\mathbb{F}_{q^2}$-maximais. De fato, todos os exemplos conhecidos de curvas $\mathbb{F}_{q^2}$-maximais são de este tipo. Assim, o resultado de Lachaud sugere os seguintes problemas, que ainda estãoem aberto,

(P3) Classificação das curvas $\mathbb{F}_{q^2}$-maximais cobertas pela Hermitiana, e
(P4) O problema da existência de curvas $\mathbb{F}_{q^2}$-maximais não cobertas pela Hermitiana.

Para estudar (parcialmente) o Problema 3, se consideram curvas quocientes $\mathcal{H}/G$ com G um subgrupo do grupo $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ de $\mathbb{F}_{q^2}$-automorfismos de $\mathcal{H}$. Isto se estuda nos artigos [CKT1] and [CKT2]. Estes artigos servem também de incentivo para o estudo do grupo $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ que, como é bem conhecido, é isomorfo ao grupo projetivo unitário $PGU(3, \mathbb{F}_{q^2})$. Em particular, o Problema 3 foi resolvido nos artigos acima citados para curvas $\mathbb{F}_{q^2}$-cobertas pela curva Hermitiana que são Galois e de grau primo.

Seja agora g, o gênero da curva $\mathbb{F}_{q^2}$-maximal $\mathcal{X}$, menor que $q(q-1)/2$. Logo, foi conjecturado por Stichtenoth and Xing [Sti-X] que $g \le (q-1)^2/4$. Esta conjectura foi probada por Fuhrmann e o autor [FT1] e de fato foi o ponto de partida para a aplicação do trabalho de Stöhr-Voloch [SV] no estudo das curvas $\mathbb{F}_{q^2}$-maximais.

O protótipo dos resultados de estas pesquisas estão explicados nos seguentes tres exemplos. Estes exemplos também ilustram as técnicas usadas nestas pesquisas. No primeiro exemplo provamos a conjectura de Stichtenoth e Xing. Os outros exemplos consideram duas propriedades relevantes das curvas maximais, a saber, que $\#[\mathcal{H}] = 1$ e que elas são não clássicas (para o sistema linear canônico). O Example 3 ilustra relacões entre a geometria do $\mathbb{F}_{q^2}$-sistema linear e a geometria do sistema linear canônico; veja [FGT, Proposition 1.7], [GT].

Exemplo 1. Seja $\mathcal{X}$ uma curva $\mathbb{F}_{q^2}$-maximal de gênero $g < q(q-1)/2$. Então, $g \le (q-1)^2/4$.

Dem. Seja $\mathcal{D}$ a $\mathbb{F}_{q^2}$-série linear de $\mathcal{X}$. Logo $\mathcal{D}$ tem grau $q+1$ e é definido por um ponto $P_0 \in \mathcal{X}(\mathbb{F}_{q^2})$, isto é, $\mathcal{D} = |(q+1)P_0|$. Mais ainda,

$$(*) \qquad (q+1)P_0 \sim (q+1)P \qquad \text{para cada } P \in \mathcal{X}(\mathbb{F}_{q^2}),$$

e 1 é uma $(\mathcal{D}, P_0)$-ordem. Logo, $(q+1)$ é uma $(\mathcal{D}, P)$-ordem para cada $P \in \mathcal{X}(\mathbb{F}_{q^2})$ e $\mathcal{D}$ é simple. Seja $r := \dim(\mathcal{D})$ e suponha, por contradição que $g > (q-1)^2/4$.

Logo a cota de Castelnuovo sobre g implica $r = 2$. Sejam $\epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$ os $\mathcal{D}$-ordens. Logo temos, $\epsilon_0 = 0, \epsilon_1 = 1$ e $\epsilon_2 \le q+1$. De fato, $\epsilon_2 \le q$, caso contrário teríamos $\epsilon_2 = q+1$ e logo, pelo critério p-adico q também seria uma $\mathcal{D}$-ordem e logo $r > 2$, o que é uma contradição . Concluímos logo que

$$\mathcal{X}(\mathbb{F}_{q^2}) \subseteq \text{conjunto de } \mathcal{D}\text{-pontos de Weierstrass de } \mathcal{X},$$

isto é, que $v_P(R) \ge 1$, $P \in \mathcal{X}(\mathbb{F}_{q^2})$, onde R denota o divisor de ramificação associado a $\mathcal{D}$. Logo,

$$\deg(R) = (1+\epsilon_2)(2g-2) + 3(q+1) \ge \#\mathcal{X}(\mathbb{F}_{q^2}) = q(2g-2) + (q+1)^2 .$$

Desta desigualdade temos que $\epsilon_2 = q$. Com efeito, se $\epsilon_2 \le q-1$ teríamos que

$$0 \ge (q-1-\epsilon_2)(2g-2) + (q+1)(q-2),$$

o qual é absurdo já que temos assumido que $g > (q-1)^2/4$. Assim temos que $2g-2 \ge (q+1)(q-2)$, ou que $g \ge q(q-1)/2$, o qual contradiz a hipótèse sobre o gênero.

Exemplo 2. Seja $\mathcal{X}$ uma curva $\mathbb{F}_{q^2}$-maximal de gênero $g = q(q-1)/2$. Então$\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}_{q^2}$-isomorfo a curva Hermitana definida acima.

Dem. Seja $\mathcal{D} = |(q+1)P_0|$ a $\mathbb{F}_{q^2}$-série linear associada a $\mathcal{X}$. Usamos resultados do example prévio. Primeiro temos que $\dim(\mathcal{D}) = 2$. Logo, sejam $\nu_0 < \nu_1$ as ordems de Frobenius associadas a $\mathcal{D}$. Temos, $\nu_0 = 0$ e $\nu_1 \le \epsilon_2 = q$. Seja S o divisor de Frobenius associado a $\mathcal{D}$. Então$v_P(S) \ge 2$ para cada $P \in \mathcal{X}(\mathbb{F}_{q^2})$ e então

$$\deg(S) = \nu_1(2g-2) + (q^2+2)(q+1) \ge 2q(2g-2) + 2(q+1)^2 .$$

Por tanto, como $2g-2 = (q-2)(q+1)$, temos que $\nu_1(q-2) \ge q(q-2)$. Sem $q > 2$, então$\nu_1 \ge q$ e logo $\nu_1 = q$. Para $q = 2$ também obtemse $\nu_1 = 2$ como segue da Equivalência Linear Fundamental [FGT, Corollary 1.2] (veja abaixo)

Assim, temos calculado as ordens e as ordens de Frobenius para $\mathcal{D}$: $(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 1, q)$ e $(\nu_0, \nu_1) = (0, q)$. (Isto significa que para um ponto P que nãoé $\mathcal{D}$-Weierstrass temos que $(q+1)P_0 \sim qP + \mathrm{Fr}_{\mathcal{X}}(P)$; de fato isto é um resultado geral, e esta relação é o que temos chamado de Equivalência Linear Fundamental.) Agora usaremos estas informações para achar uma equação $\mathbb{F}_{q^2}$-plana para $\mathcal{X}$.

Sejam $m_1 < m_2$ os dois primeiros positivos nãolacunas de Weierstrass em P_0. Logo claramente $m_2 = q+1$ e afirmamos que $m_1 = q$. Para ver isto, usamos o fato que 1 é uma $(\mathcal{D}, P_0)$-ordem, isto é temos que $P_0 + D \sim (q+1)P_0$ com $P_0 \notin \mathrm{Supp}(D)$ e se segue a afirmação . Agora, sejam $x, y \in \mathbb{F}_{q^2}(\mathcal{X})$, as funções em $\mathbb{F}_{q^2}(\mathcal{X})$, o corpo de funções racionais sobre $\mathbb{F}_{q^2}$ de $\mathcal{X}$, tal que $\mathrm{div}_\infty(x) = qP_0$ e $\mathrm{div}_\infty(y) = (q+1)P_0$. Seja $\pi = (1 : x : y)$ o morfismo sobre $\mathbb{F}_{q^2}$ associado a $\mathcal{D}$. Logo, ja que $\nu_1 = q$, devemos ter

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & x^{q^2} & y^{q^2} \\ 1 & x & y \\ 0 & 1 & Dy \end{pmatrix} = 0\,,$$

onde temos escolhido x como uma variavel separante de $\mathbb{F}_{q^2}(\mathcal{X})|\mathbb{F}_{q^2}$ e onde $D^i = D^i_x$ denota a i-ésima derivada de Hasse. Consequentemente temos uma equação do tipo

$$(*) \qquad y^{q^2} - y = Dy(x^{q^2} - x)\,,$$

a qual é similar á equação que define a curva Hermitiana. Para ver isto, primeiro mostraremos que $f := Dy$ é uma q-pôtencia em $\mathbb{F}_{q^2}(\mathcal{X})$. Para esta finalidade recorreremos a um velho resultado de Hasse e Schmidt, [Ha-Sch, Satz 10], onde eles mostram que f é uma q-potência em $\mathbb{F}_{q^2}(\mathcal{X})$ se e somente se $D^i f = 0$ para $i = 1, \ldots, q-1$. Mostraremos esta ultima propriedade por indução sobre i. Para $i = 1$, calculamos $D^1 f$ da Equação $(*)$; temos $-f = (Df)(x^{q^2} - x) - f$ e então$Df = 0$. Suponha que o resultado é verdadeiro para $1 \le i < q-1$. Aplicando D^{i+1} na Equação $(*)$ temos: $-D^{i+1}y = (D^{i+1}f)(x^{q^2} - x) - D^i f$ e logo pela indução que $-D^{i+1}y = (D^{i+1}f)(x^{q^2} - x)$. Por outro lado, ja que $\epsilon_2 = q$, devemos ter o seguinte

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & Dy \\ 0 & 0 & D^j y \end{pmatrix} = 0\,, \qquad \text{para } j = 2, \ldots, q-1\,,$$

e logo $D^j y = 0$, $2 \le < j < q$. Então$D^{i+1}f = 0$ e temos provado que f é uma q-potencia em $\mathbb{F}_{q^2}(\mathcal{X})$, digamos $f = x_1^q$. Logo, $\mathrm{div}_\infty(x_1) = qP_0$ como se segue de $(*)$ e assim $x_1 = a + bx$, com $a, b \in \mathbb{F}_{q^2}$, $b \neq 0$. Agora Equação $(*)$ pode ser reescrita na seguente forma,

$$(by)^{q^2} - by = x_1^{q^2} - x_1\,,$$

ou equivalentemente como

$$(y_1^q + y_1 - x_1^q)^q = y_1^q + y_1 - x_1^q\,,$$

com $y_1 := by$, e se segue a prova do Exemplo 2.

Consequentemente, o gênero g de uma curva $\mathbb{F}_{q^2}$-maximal satisfaz

$$g \le g_2 := \lfloor (q-1)^2/4 \rfloor \qquad \text{ou} \qquad g = g_1 := q(q-1)/2\,.$$

Assim é natural perguntar-se o que sucede com o caso g_2. Note que a partir daqui devemos considerar fatos aritméticos sobre q. Se q é ímpar então de fato existe e é única (salvo $\mathbb{F}_{q^2}$-isomorfismo) uma curva $\mathbb{F}_{q^2}$-maximal de gênero g_2, a saber o modelo nãosingular da curva plana [FGT, Section 3].

$$y^q + y = x^{(q+1)/2}\,.$$

Se q é par temos que o modelo nãosingular da curva

$$\sum_{i=1}^{t} y^{q/2^i} = x^{q+1}, \qquad q = 2^t\,,$$

é $\mathbb{F}_{q^2}$-maximal com gênero g_2. O problema agora é saber se é unica. Isto é o caso se a curva satisfaz uma hipótese sobre nãolacunas de Weierstrass em algum ponto $\mathbb{F}_{q^2}$-racional, veja [Ab-T]. Devo observar que é possivel que semigrupos de Weierstrass em pontos racionais determinem curvas maximais nãoisomorfas a pésar de ter o mesmo gênero. Por exemplo, para $q \equiv 3 \pmod 4$ temos pelo menos duas curvas de gênero $(q-1)(q-3)/8$ que nãosão$\mathbb{F}_{q^2}$-isomorfas, veja [CHKT, [Remark 4.1(ii)]. Aqui fica por determinar se existe ou nãouma curva $\mathbb{F}_{q^2}$-maximal nãoisomorfa as anteriores tendo o gênero $(q-1)(q-3)/8$.

Em [FT2, Proposition 2.5], para q ímpar, foi ainda notado que

$$g \leq (q-1)(q-2)/4 \qquad \text{se} \qquad g < g_2\,.$$

Logo o terceiro maior gênero g_3 que uma curva $\mathbb{F}_{q^2}$-maximal, q ímpar, pode ter satisfaz $g_3 \leq (q-1)(q-2)/4$. Esta cota é a melhor possível para pequenos valores de q, veja [Se, Section 4]. Em geral se conjectura que $g_3 = \lfloor (q^2-q+4)/6 \rfloor$, veja [CKT2, Section 5].

Exemplo 3. A curva Hermitiana $\mathcal{H}$ é nãoclássica (para o sistema linear canônico) e o conjunto de pontos de Weierstrass $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ é igual ao conjunto $\mathcal{H}(\mathbb{F}_{q^2})$.

Observamos que curvas hermitianas de baixo gênero estãoentre os primeiros exemplos de curvas nãoclassicas, cf. o artigo de F.K. Schmidt [Sch]. Example 3 foi notado por Garcia and Viana [G-Vi, Theorem 2], e este autores também calculam $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}$. Eles fazem estes cálculos via diferenciais de primeiro ordem. Neste exemplo mostramos que isto pode ser calculado a partir do $\mathbb{F}_{q^2}$-sistema linear $\mathcal{D} = |(q+1)P_0|$ associado ao $\mathcal{H}$.

Dem. Seja R o divisor de ramificação associado ao $\mathcal{D}$. Pelo Example 1 temos

$$\deg(R) = \#\mathcal{H}(\mathbb{F}_{q^2})\,,$$

e portanto os $(\mathcal{D}, P)$-ordens são:

(1) $0, 1, q+1$ para $P \in \mathcal{H}(\mathbb{F}_{q^2})$,
(2) $0, 1, q$ para $P \notin \mathcal{H}(\mathbb{F}_{q^2})$.

Ademais, ja que o gênero de $\mathcal{H}$ é $g = q(q-1)/2$, e q e $q+1$ sãonãolacunas de Weierstrass para P_0, o semigrupo de Weierstrass no P_0 será $\langle q, q+1 \rangle$. Portanto $\mathcal{K} = |(2g-2)P_0|$

é a série linear canônica de $\mathcal{H}$. Como $(2g-2)=(q+1)(q-2)$, então$\mathcal{K}=(q-2)\mathcal{D}$ e o seguente conjunto

$$\{a+b(q+1) : a, b \geq 0,\ a+b \leq q-2\} \qquad P \in \mathcal{H}(\mathbb{F}_{q^2})$$

(respectivamente

$$\{a+bq : a, b \geq 0,\ a+b \leq q-2\} \qquad P \notin \mathcal{H}(\mathbb{F}_{q^2}))\,,$$

está contido no conjunto de $(\mathcal{K}, P)$-ordens para $P \in \mathcal{H}(\mathbb{F}_{q^2})$ (respetivamente $P \notin \mathcal{H}(\mathbb{F}_{q^2})$). Como temos $q(q-1)/2$ elementos em cada um dos conjuntos acima concluímos que devemos ter a igualdade acima. Se segue logo que $\mathcal{W}_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\mathbb{F}_{q^2})$. Para deduzir a nãoclassidade de $\mathcal{H}$ é suficiente notar que q, o qual é menor que g, é uma ordem canônica. (De fato q é sempre uma ordem canônica para toda curva $\mathbb{F}_{q^2}$-maximal de gênero suficentemente grande [FGT, Proposition 1.7]. Logo tais curvas serão nãoclássicas.)

Informalmente falando e devido ao lema de Castenuovo para o gênero de curvas em espaços projetivos, deduzimos dos exemplos acima que uma curva maximal de gênero grande está determinada pela propriedade $(*)$ no Exemplo 1. Para poder continuar com estas idéas é preciso utilizar a chamada Equivalência Linear Fundamental mencionada antes.

Vale a pena mencionar que estas técnicas podem ser aplicadas em um contexto muito mais amplo sempre que a função zeta das curvas satisfaçam certas identidades, cf. [FT2, Section 1.3]. Por exemplo, pode-se provar a unicidade da curva de Deligne-Lusztig $\mathcal{S}$ associada ao grupo de Suzuki $Sz(\ell)$, $\ell = 2\ell_0, \ell_0 = 2^a$, baseado no gênero de $\mathcal{S}$ e $\#\mathcal{S}(\mathbb{F}_\ell)$; veja [FT2, Section 3]. Este resultado era conhecido (veja Hansen e Pedersen [Han-P, Page 100]) baseado no gênero de $\mathcal{S}$, $\#\mathcal{S}(\mathbb{F}_\ell)$, e o grupo de $\mathbb{F}_\ell$-automorfismos de $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}$. Esta curva é interessante porque ela é $(\mathbb{F}_\ell, \tilde{g})$-*optimal*, isto é $\mathcal{S}$ tem o máximo número de pontos $\mathbb{F}_\ell$-racionais que uma curva de gênero $\tilde{g}$ pode ter. cf. o artigo de Hansen e Stichtenoth [Han-Sti].

References

[Ab-T] M. Abdón and F. Torres, On maximal curves in characteristic two (provisory title), preprint (1998).

[Au-Pe] Y. Aubry and M. Perret, A Weil theorem for singular curves, *Arithmetic, Geometry and Coding - 4* (Luminy 1993) (Eds. R. Pellikaan, M. Perret and S.G. Vlăduţ), Walter de Gryter - Berlin - New York, 1–7, 1996.

[Bach] E. Bach, Weil bounds for singular curves, *AAECC* **7**, 289–298 (1996).

[CHKT] A. Cossidente, J.W.P. Hirschfeld, G. Korchmáros and F. Torres, On plane maximal curves, to appear in Compositio Math.

[CKT1] A. Cossidente, G. Korchmáros and F. Torres, On curves covered by the Hermitian curve, to appear in J. Algebra.

[CKT2] A. Cossidente, G. Korchmáros and F. Torres, On curves covered by the Hermitian curve, II, math.AG/9807166, submitted.

[FGT] R. Fuhrmann, A. Garcia and F. Torres, On maximal curves, *J. Number Theory* **67**(1), 29–51 (1997).

[FT1] R. Fuhrmann and F. Torres, The genus of curves over finite fields with many rational points, *Manuscripta Math.* **89**, 103–106 (1996).

[FT2] R. Fuhrmann and F. Torres, On Weierstrass points and optimal curves, *Rend. Circ. Mat. Palermo Suppl.* **51**, (1998), 25–46.

[GT] A. Garcia and F. Torres, On maximal curves having classical Weierstrass gaps, math.AG/9801106, submitted.

[G-Vi] A. Garcia and P. Viana, Weierstrass points on certain non-classical curves, *Arch. Math.* **46**, 315–322 (1986).

[Go] V.D. Goppa, Algebraic-geometric codes, *Math. USRR-Izv.* **21**(1), 75–91 (1983).

[Han-P] J.P. Hansen and J.P. Pedersen, Automorphism group of Ree type, Deligne-Lusztig curves and function fields, *J. reine angew. Math,* **440**, 99–109 (1993).

[Han-Sti] J.P. Hansen and H. Stichtenoth, Group codes on certain algebraic curves with many rational points, *AAECC* **1**, 67–77 (1990).

[Ha-Sch] H. Hasse and F.K. Schmidt, Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten, *J. reine angew. Math.* **177**, 215–237 (1937).

[H] J.W.P. Hirschfeld, *Projective Geometries Over Finite Fields*, second edition, Oxford University Press, Oxford, 1998.

[Ih] Y. Ihara, Some remarks on the number of rational points of algebraic curves over finite fields, J. Fac. Sci. Tokio **28**, 721–724 (1981).

[La] G. Lachaud, Sommes d'Eisenstein et nombre de points de certaines courbes algébriques sur les corps finis, C.R. Acad. Sci. Paris, **305**, Série I, 729–732 (1987).

[LY] D.B. Leep and C.C. Yeomans, The number of points on a singular curve over a finite field, *Arch. Math.* **63**, 420–426 (1994).

[Mo] C.J. Moreno, *Algebraic Curves over Finite Fields*, Cambridge University Press, Vol. 97, 1991.

[R-Sti] H.G. Rück and H. Stichtenoth, A characterization of Hermitian function fields over finite fields, *J. Reine Angew. Math.* **457**, 185–188 (1994).

[Sch] F.K. Schmidt, Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen II. Allgemeine Theorie der Weierstrasspunkte, *Math. Z.* **45**, 75–96 (1939).

[Se] B. Segre, Introduction to Galois geometries (edited by J.W.P. Hirschfeld), *Atti. Accad. Naz. Lincei Mem.* **8**, 133–236 (1967).

[Ste] S.A. Stepanov, *Arithmetic of Algebraic Curves*, Consultants Bureau, New York and London, 1994.

[Se] J.P. Serre, *Résumé des cours de 1983–1984*, Annu. College France **79-83** (1984); reprinted in Œuvres **III**, 701–705.

[Sti-X] H. Stichtenoth and C.P. Xing, The genus of maximal function fields, *Manuscripta Math.* **86**, 217–224 (1995).

[S] K.O. Stöhr, On the poles of regular differentials of singular curves, *Bol. Soc. Bras. Mat.* **24**(1), 105–136 (1993).

[SV] K.O. Stöhr and J.F. Voloch, Weierstrass points and curves over finite fields, *Proc. London Math. Soc.* **52**, 1–19 (1986).

[Tsf-Vl] M.A. Tsfasman and S.G. Vlăduţ, *Algebraic-Geometric Codes*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht-Bosto-London 1991.

[W] A. Weil, *Courbes algébriques et variétés abeliennes*, Hermann, Paris, 1971.

IMECC-UNICAMP, Cx. P. 6065, Campinas-13083-970-SP, Brazil

E-mail address: ftorres@ime.unicamp.br