Estimativas de regularidade para modelos não-lineares com lei de degenerescência dupla e algumas aplicações

Supervisor: Prof. Dr. João Vitor da Silva.

Elzon Cézar Bezerra Júnior

Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
IMECC
Programa de Pós-Graduação em Matemática

17/11/2022

Estrutura da Apresentação

1. Regularidade ótima e melhorada para uma classe de equações parabólicas duplamente degeradas;
2. Problema singularmente perturbado com dupla degenerescência

Regularidade ótima e melhorada para uma classe de equações parabólicas duplamente degeradas.

Notação

- ✓ Ω será um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$;

Notação

- ✓ Ω será um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$;
- ✓ $\Omega_T = \Omega \times (0, T], \quad T > 0$ é o domínio espacial-temporal;

Notação

- ✓ Ω será um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$;
- ✓ $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$, $\quad T > 0$ é o domínio espacial-temporal;
- ✓ $L^{q,r}(\Omega_T) = L^r(0; T; L^q(\Omega))$ é um espaço de Banach com a seguinte norma:

Notação

- ✓ Ω será um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$;
- ✓ $\Omega_T = \Omega \times (0, T], \quad T > 0$ é o domínio espacial-temporal;
- ✓ $L^{q,r}(\Omega_T) = L^r(0; T; L^q(\Omega))$ é um espaço de Banach com a seguinte norma:

$$||f||_{L^{q,r}(\Omega_T)} := \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |f(x,t)|^q \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}}$$

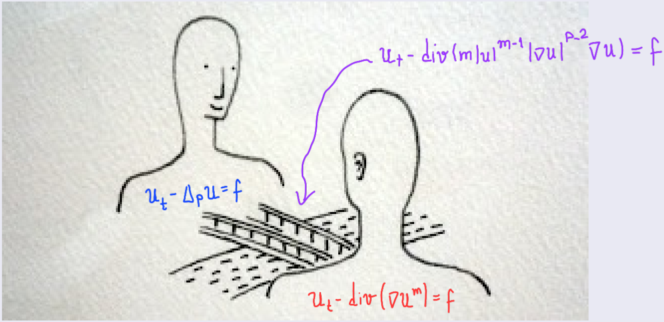
Introdução

O objetivo inicial desta apresentação é estabelecer estimativas $C_{loc}^{\alpha,\frac{\alpha}{\theta}}$ de caráter *ótimo* e *melhorado* para soluções fracas e limitadas de uma classe de equações parabólicas duplamente degeneradas cuja equação modelo é dada por:

$$u_t - \mathrm{div}(m|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,t) \quad \text{em} \quad \Omega_T. \tag{1}$$

Acima, $p \geqslant 2$, $m \geqslant 1$. Os casos limítrofes, nomeadamente, $p = 2$ e $m = 1$, são respectivamente:

Acima, $p \geqslant 2$, $m \geqslant 1$. Os casos limítrofes, nomeadamente, $p = 2$ e $m = 1$, são respectivamente:



Além do interesse matemático

- ✓ Análise da filtração turbulenta de um gás ou um fluído em um meio poroso (Ivanov);
- ✓ Problemas sobre lençóis freáticos (Ivanov).

Hipóteses Principais

(P1) **[Integrabilidade do termo fonte]** $f \in L^{q,r}(\Omega_T)$;

(P2) **[Condições de Compatabilidade]** Assumiremos as seguintes condições fracas de compatibilidade:

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{pq} < 1 < \frac{2}{r} + \frac{n}{q}, \tag{W-CC}$$

que implica

Hipóteses Principais

(P1) **[Integrabilidade do termo fonte]** $f \in L^{q,r}(\Omega_T)$;

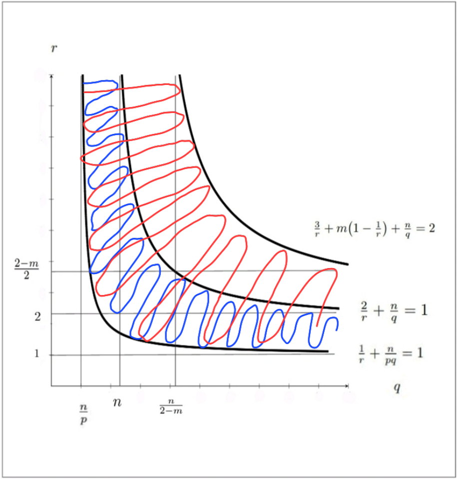
(P2) **[Condições de Compatabilidade]** Assumiremos as seguintes condições fracas de compatibilidade:

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{pq} < 1 < \frac{2}{r} + \frac{n}{q}, \tag{W-CC}$$

que implica

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{pq} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{3}{r} + m\left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{n}{q} > 2 \quad (\text{para} \quad q, r > 1). \tag{S-CC}$$

As condições $(W-CC)$ e $(S-CC)$ provém a integrabilidade mínima do termo fonte que garante a existência de soluções limitadas e o caso limite para o regime de regularidade Hölder ótima.



r
$\frac{2-m}{2}$
2
1
$\frac{3}{r} + m(1 - \frac{1}{r}) + \frac{n}{q} = 2$
$\frac{2}{r} + \frac{n}{q} = 1$
$\frac{1}{r} + \frac{n}{pq} = 1$
q
$\frac{n}{p}$
n
$\frac{n}{2-m}$

Ambiente

O ambiente deste estudo serão os cilindros parabólicos :

$$Q_\rho^-(x_0, t_0) = B_\rho(x_0) \times \left(t_0 - \rho^\theta, t_0\right]$$

onde $\theta > 0$ é o *fator de escala temporal intrínseco* dado por

$$\theta = p - \alpha(m + p - 3) = p - \alpha(m + p - 2).\left(1 - \frac{1}{m + p - 2}\right) \qquad (2)$$

e $\alpha > 0$ é o expoente Hölder ótimo dado por ((sharp)).

Visão geral do trabalho

✓ Estimativa do tipo Cacioppolli;

Visão geral do trabalho

- ✓ Estimativa do tipo Cacioppolli;
- ✓ Análise Tangencial;

Visão geral do trabalho

- ✓ Estimativa do tipo Cacioppolli;
- ✓ Análise Tangencial;
- ✓ Processo Iterativo;

Visão geral do trabalho

- ✓ Estimativa do tipo Cacioppolli;
- ✓ Análise Tangencial;
- ✓ Processo Iterativo;
- ✓ Aplicações.

Estado da Arte

✓ Limitação de Soluções - D.Andreucci (1991)

Estado da Arte

- ✓ Limitação de Soluções - D.Andreucci (1991)
- ✓ Hölder regularidade para soluções limitadas - M.Porzio e V.Vespri (1993)

Estado da Arte

- ✓ Limitação de Soluções - D.Andreucci (1991)
- ✓ Hölder regularidade para soluções limitadas - M.Porzio e V.Vespri (1993)
- ✓ Desigualdade de Harnack - S.Fornaro e M.Sosio (2008)

Estado da Arte

- ✓ Limitação de Soluções - D.Andreucci (1991)
- ✓ Hölder regularidade para soluções limitadas - M.Porzio e V.Vespri (1993)
- ✓ Desigualdade de Harnack - S.Fornaro e M.Sosio (2008)
- ✓ Existência de Soluções - S.Sturm (2017).

Por fim, eis um quadro unificado de resultados de regularidade Hölder que o teorema principal desse trabalho visa unificar:

Equação Modelo	**Condições de Compatibilidade**	**Regularidade Hölder ótima**	**Referências**
$u_t - \Delta u = f$	$1 < \frac{n}{q} + \frac{2}{r} < 2$	$\alpha = 2 - \left(\frac{2}{r} + \frac{n}{q}\right)$	Silva e Teixeira
$u_t - \mathrm{div}(m\|u\|^{m-1}\nabla u) = f$	$\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} < 1$	$\alpha = \min\left\{\frac{\alpha_{\mathrm{Hom}}^-}{m}, \frac{[(2q-n)r-2q]}{q[mr-(m-1)]}\right\}$	D.Araújo, Maia e Urbano
$u_t - \mathrm{div}(m\|u\|^{m-1}\nabla u) = f$	$\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} < 1$	$\alpha = \min\left\{\frac{2\alpha_{\mathrm{Hom}}^-}{2+(m-1)\alpha_{\mathrm{Hom}}}, \frac{(2q-n)r-2q}{q[mr-(m-1)]}\right\}$	Diehl
$u_t - \Delta_p u = f$	$\frac{n}{q} + \frac{2}{r} < 1 < \frac{1}{r} + \frac{n}{pq}$	$\alpha = \frac{(pq-n)r-pq}{q[(p-1)r-(p-2)]}$	Teixeira e Urbano
$u_t - \mathrm{div}(m\|u\|^{m-1}\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u) = f$	$\frac{1}{r} + \frac{n}{pq} < 1$ e $\frac{3}{r} + \frac{n}{q} > 2$	$\alpha = \min\left\{\frac{\alpha_{\mathrm{Hom}}^-(p-1)}{m+p-2}, \frac{(pq-n)r-pq}{q[(r-1)(m+p-2)+1]}\right\}$	J.Araújo

Guia de Viagem

[1] BEZERRA JÚNIOR, E.C.; DA SILVA, J.V e RICARTE. G.C. Geometric estimates for doubly nonlinear parabolic PDEs. **Nonlinearity**, (2022) vol. 35, nº 5 - DOI: 10.1088/1361-6544/ac636e

Guia de Viagem

[1] BEZERRA JÚNIOR, E.C.; DA SILVA, J.V e RICARTE. G.C. Geometric estimates for doubly nonlinear parabolic PDEs. **Nonlinearity**, (2022) vol. 35, nº 5 - DOI: 10.1088/1361-6544/ac636e

[2] PORZIO, M.M; VESPRI, Hölder estimates for local solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations. **J. Differential Equations** 103 (1993), no. 1, 146-178.

Guia de Viagem

[1] BEZERRA JÚNIOR, E.C.; DA SILVA, J.V e RICARTE. G.C. Geometric estimates for doubly nonlinear parabolic PDEs. **Nonlinearity**, (2022) vol. 35, nº 5 - DOI: 10.1088/1361-6544/ac636e

[2] PORZIO, M.M; VESPRI, Hölder estimates for local solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations. **J. Differential Equations** 103 (1993), no. 1, 146-178.

[3] TEIXEIRA. E.V.; URBANO, J.M, A geometric tangential approach to sharp regularity for degenerate evolution equations. **Anal. PDE** 7 (2014), no.3, 733-744.

Resultados Principais

Teorema (Hölder Regularidade local)

Seja u uma solução fraca e limitada da equação (1) *em* Q_1^- *e suponha que (P1)-(P2) estão em voga. Então,* $u \in C_{loc}^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}(Q_1^-)$ *(no sentido parabólico), i.e., existe uma constante* M_0("*universal*") > 0 *tal que*

Resultados Principais

Teorema (Hölder Regularidade local)

Seja u uma solução fraca e limitada da equação (1) em Q_1^- *e suponha que (P1)-(P2) estão em voga. Então,* $u \in C_{loc}^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}(Q_1^-)$ *(no sentido parabólico), i.e., existe uma constante* M_0*("universal")* > 0 *tal que*

$$[u]_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}\left(Q_{\frac{1}{2}}^-\right)} \leqslant \mathrm{M}_0. \left[\|u\|_{L^\infty(Q_1^-)} + \|f\|_{L^{q,r}(Q_1^-)}\right],$$

Resultados Principais

Teorema (Hölder Regularidade local)

Seja u uma solução fraca e limitada da equação (1) *em* Q_1^- *e suponha que (P1)-(P2) estão em voga. Então,* $u \in C_{loc}^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}(Q_1^-)$ *(no sentido parabólico), i.e., existe uma constante* M_0(*"universal"*) > 0 *tal que*

$$[u]_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}\left(Q^-_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant \mathrm{M}_0. \left[\|u\|_{L^\infty(Q_1^-)} + \|f\|_{L^{q,r}(Q_1^-)}\right],$$

onde $\alpha \in (0,1)$ *é definido por* ((sharp)), θ *é dado por* (2), *e*

$$[u]_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}\left(Q^-_{\frac{1}{2}}\right)} = \sup_{0<\rho\leqslant\rho_0}\left(\inf_{(x_0,t_0)\in Q^-_{\rho_0}} \frac{\|u-u(x_0,t_0)\|_{L^\infty\left(Q^-_{\rho_0}(x_0,t_0)\cap Q^-_{\frac{1}{2}}\right)}}{\rho_0^\alpha}\right).$$

Resultados Principais

$$\alpha = \min\left\{\max\left\{\frac{\alpha_{\mathrm{Hom}}^{-} p}{p_m + \alpha_{\mathrm{Hom}}(m+p-3)}, \frac{2\alpha_{\mathrm{Hom}}^{-}(p-1)}{p_m(m+p-2)}\right\}, \underset{((\mathrm{sharp}))}{\frac{(pq-n)r-pq}{q[(r-1)(m+p-2)+1]}}\right\},$$

onde $\alpha_{\mathrm{Hom}} \in (0,1]$ é o expoente Hölder ótimo para o problema homogêneo com coeficientes constantes e ι^{-} significa que podemos escolher qualquer valor $s \in (0,\iota)$, finalmente

$$p_m = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad m = 1 \\ p & \text{se} \quad m > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Cenários Limite

A fim de confirmar o caráter ótimo e melhorado, comparando

$$\min\left\{\frac{\alpha_{\mathrm{Hom}}^{-}(p-1)}{m+p-2}, \frac{(pq-n)r-pq}{q[(r-1)(m+p-2)+1]}\right\}$$

com ((sharp)). Temos que $\forall p \geqslant 2 \quad \text{e} \quad m \geqslant 1$

$$\frac{2(p-1)}{p_m(m+p-2)} \leqslant \frac{p-1}{m+p-2}.$$

Cenários Limite

A fim de confirmar o caráter ótimo e melhorado, comparando

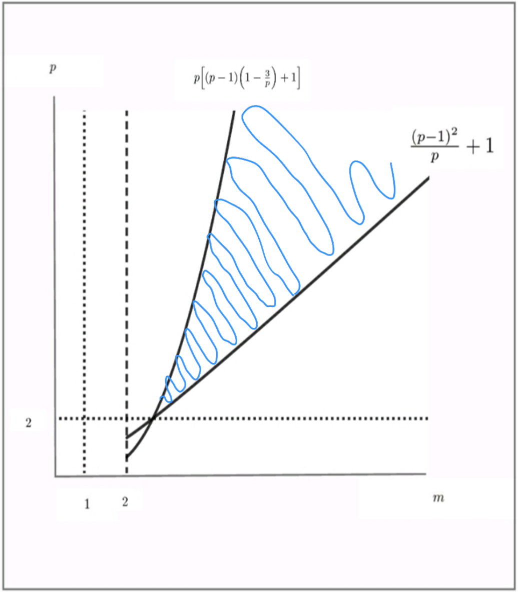
$$\min\left\{\frac{\alpha_{\mathrm{Hom}}^{-}(p-1)}{m+p-2}, \frac{(pq-n)r-pq}{q[(r-1)(m+p-2)+1]}\right\}$$

com ((sharp)). Temos que $\forall p \geqslant 2 \quad \text{e} \quad m \geqslant 1$

$$\frac{2(p-1)}{p_m(m+p-2)} \leqslant \frac{p-1}{m+p-2}.$$

Assim, impomos

$$\frac{\alpha_{\mathrm{Hom}}^{-}p}{p_m+\alpha_{\mathrm{Hom}}(m+p-3)} \geqslant \frac{\alpha_{\mathrm{Hom}}^{-}(p-1)}{m+p-2} \tag{4}$$


p
$p\left[(p-1)\left(1-\frac{3}{p}\right)+1\right]$
$\frac{(p-1)^2}{p}+1$
2
1
2
m

Resultados Principais

Proposição (Estimativa do tipo Caccioppoli)

Seja $K \times [t_1, t_2] \subset \Omega_T$. *Se* u *é uma solução fraca de* (1), *então existe uma constante* $C = (n, p, K \times [t_1, t_2]) > 0$ *tal que*

Resultados Principais

Proposição (**Estimativa do tipo Caccioppoli**)

Seja $K \times [t_1, t_2] \subset \Omega_T$. *Se* u *é uma solução fraca de* (1), *então existe uma constante* $C = (n, p, K \times [t_1, t_2]) > 0$ *tal que*

$$\sup_{t_1<t<t_2} \int_K u^2 \xi^p dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_K |u|^{m-1} |\nabla u|^p \xi^p dxdt$$

$$\leqslant \mathrm{C} \int_{t_1}^{t_2} \int_K u^2 \xi^{p-1} |\xi_t| dxdt + \int_{t_1}^{t_2} \int_K |u|^{m+p-1} |D\xi|^p dxdt + C\|f\|^2_{L^{q,r}}.$$

para cada $\xi \in C_0^\infty(K \times (t_1, t_2); [0, 1])$

Lema ((m,p)-Aproximação)

Se u é uma solução fraca da equação (1) *em* Q_1^- *com* $\|u\|_{L^\infty(Q_1^-)} \leqslant 1$*, então* $\forall \varepsilon > 0$ *existe* $\delta = \delta(p, n, m, \varepsilon) > 0$ *para o qual satisfaz a seguinte propriedade: sempre que*

$$\|f\|_{L^{q,r}(Q_1^-)} \leqslant \delta_\varepsilon.$$

Lema ((m, p)-Aproximação)

Então existe uma função (m, p)-calórica $\phi : Q_{\frac{1}{2}}^{-} \to \mathbb{R}$, i.e.,

$$\phi_t - \mathrm{div}(m|\phi|^{m-1}|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi) = 0 \quad em \quad Q_{\frac{1}{2}}^{-},$$

tal que

$$\|u - \phi\|_{L^\infty\left(Q_{\frac{1}{2}}^{-}\right)} < \varepsilon.$$

Dificuldades Técnicas

Diferente das equações do tipo p-laplaciano com coeficientes contínuos, onde podemos utilizar

$$\mathcal{L}^{q,\lambda}(\Omega,\delta) \approx C^{0,\alpha}(\Omega,\delta) \quad com \quad q \geqslant 1 \quad \lambda > 1$$

não podemos proceder com um esquema de iteração que leve em conta o mergulho acima , ou seja,

$$\sup_{Q^{-}_{\rho^k}(x_0,t_0)} \frac{|u(x,t)-\mathfrak{c}_k|}{\rho^{k\alpha}} \leqslant 1 \quad \overset{\text{Campanato-Da Prato}}{\underset{\Rightarrow}{\text{embedding}}} \quad u \text{ é } C^{\alpha,\frac{\alpha}{\theta}} \quad \text{em } (x_0,t_0).$$

Ora, a priori, não sabe se, qual EDP satisfaz

$$u_k(x,t) = \frac{u(\rho^k x + x_0, \rho^{k\theta} t + t_0) - \mathfrak{c}_k}{\rho^{k\alpha}},$$

uma vez que $u \mapsto u_t - \mathrm{div}(m|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ não é invariante por translações por mapas constantes.

Ideia para a prova

É suficiente mostrar que existe uma constante $\mathrm{M}_0(''universal'') > 0$ tal que

$$\|u - u(0,0)\|_{L^\infty(Q_\rho^-)} \leqslant \mathrm{M}_0\rho^\alpha. \tag{5}$$

De fato, o lema de (m,p)-aproximação, permite acessar tangencialmente um problema de regularidade melhor, e, por sua vez o processo iterativo importa a regularidade para a classe de equações regida por (1), por meio do controle da norma de u em cilindros adequados e na região onde a função u degenera.

Aplicações

✓ *Liouville*: Uma solução inteira para o modelo homogêneo associado a (1) com uma taxa de crescimento adequada deve ser constante.

Aplicações

- ✓ *Liouville*: Uma solução inteira para o modelo homogêneo associado a (1) com uma taxa de crescimento adequada deve ser constante.
- ✓ *Aproximação Assintótica*: Se p e m são aproximadamente 2 e 1, respectivamente, e, f tem integrabilidade adequada, as soluções de (1) estão próximas de funções calóricas.

Uma pausa para respirar

Problema singularmente perturbado com dupla degenerescência

Notação

✓ Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$;

Notação

- ✓ Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$;
- ✓ $\Omega' \Subset \Omega$ quer dizer que Ω' contém $\overline{\Omega}$ e o último é um conjunto compacto;

Notação

- ✓ Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$;
- ✓ $\Omega' \Subset \Omega$ quer dizer que Ω' contém $\overline{\Omega}$ e o último é um conjunto compacto;
- ✓ $d \coloneqq \mathrm{dis}(\Omega', \partial\Omega)$;

Notação

- ✓ Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$;
- ✓ $\Omega' \Subset \Omega$ quer dizer que Ω' contém $\overline{\Omega}$ e o último é um conjunto compacto;
- ✓ $d \coloneqq \mathrm{dis}(\Omega', \partial\Omega)$;
- ✓ Uma constante C será dita universal se depende apenas dos dados do problema.

Introdução

Motivação

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $\partial\Omega$ uma hipersuperfície compacta em $\mathbb{R}^n$,$f, g \in C(\overline{\Omega})$ não-negativas . É possível encontrar um domínio Ω', com $\Gamma = \partial\Omega' \subset \Omega$, "hipersuperfície compacta" tal que é solúvel o problema abaixo

Introdução

Motivação

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $\partial\Omega$ uma hipersuperfície compacta em $\mathbb{R}^n$,$f, g \in C(\overline{\Omega})$ não-negativas . É possível encontrar um domínio Ω', com $\Gamma = \partial\Omega' \subset \Omega$, "hipersuperfície compacta" tal que é solúvel o problema abaixo

$$\begin{cases} [|\nabla u|^p + \mathrm{a}(x)|\nabla u|^q]\Delta u = f \quad \text{em} \quad \Omega \setminus \Omega' \\ u = g \quad \text{em} \quad \partial\Omega \\ u = 0 \quad , \; u_\eta = 1 \text{ em} \quad \Gamma \end{cases} ,$$

onde η é o vetor normal interior a Γ?

Introdução

Será de interesse o estudo da seguinte família de soluções da equação

$$(\mathrm{E})_\varepsilon \quad \begin{cases} \mathcal{H}(x, u^{\epsilon})F(x, D^2 u^{\epsilon}) & = & \zeta_{\epsilon}(x, u_{\varepsilon}) \text{ em } \Omega \\ u_{\epsilon} & = & g \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

onde desejamos desenvolver estimativas associadas às soluções que sejam uniformes em ε de modo a transportá-las para o problema superdeterminado.

O interesse neste estudo transcende o campo matemático:

1) Propagação de chamas [L.A Caffarelli et al] ;
2) Teoria de combustão (caso estacionário) [C.Lederman et al].

Hipóteses estruturais

(A0) (**Continuidade e Condição de Normalização**)

Fixado $\Omega \ni x \mapsto F(x, \cdot) \in C^0(\mathrm{Sym}(N))$ e $F(\cdot, \mathrm{O}_{N\times N}) = 0.$

Hipóteses estruturais

(A0) (**Continuidade e Condição de Normalização**)

Fixado $\Omega \ni x \mapsto F(x,\cdot) \in C^0(\mathrm{Sym}(N))$ e $F(\cdot, \mathrm{O}_{N\times N}) = 0.$

(A1) (**Elipticidade Uniforme**) Para qualquer par de matrizes $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in Sym(N)$

$$\mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) \leqslant F(x,\mathrm{X}) - F(x,\mathrm{Y}) \leqslant \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})$$

onde $\mathcal{M}^{\pm}_{\lambda,\Lambda}$ são os *operadores extremais de Pucci*

(A2) ($\omega-$**continuidade dos coeficientes**) Existe um módulo uniforme de continuidade $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ e uma constante $\mathrm{C_F} > 0$ tal que

$$\Theta_{\mathrm{F}}(x, x_0) = \sup_{\substack{\mathrm{X} \in Sym(N) \\ \mathrm{X} \neq 0}} \frac{|F(x, \mathrm{X}) - F(x_0, \mathrm{X})|}{\|\mathrm{X}\|} \leqslant \mathrm{C_F}\,\omega(|x - x_0|),$$

A função $\mathcal{H} : \Omega \times \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ se comporta como

$$L_1 \cdot \mathcal{K}_{p,q,\mathfrak{a}}(x, |\xi|) \leqslant \mathcal{H}(x, \xi) \leqslant L_2 \cdot \mathcal{K}_{p,q,\mathfrak{a}}(x, |\xi|) \tag{6}$$

para constantes $0 < L_1 \leqslant L_2 < \infty$, onde

$$\mathcal{K}_{p,q,\mathfrak{a}}(x, |\xi|) = |\xi|^p + \mathfrak{a}(x)|\xi|^q, \ \text{ para } \ (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N. \tag{7}$$

Além do mais, para a degenerescência não-homogênea , considera-se que os expoentes p, q e a função moduladora $\mathfrak{a}(\cdot)$ satisfazem

$$0 < p \leqslant q < \infty \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{a} \in C^0(\Omega, [0, \infty)). \tag{8}$$

O termo ζ_ϵ se comporta como $O(\epsilon^{-1})$ ao longo das camadas de nível, assim:

$$\mathcal{B}_0 \leqslant \zeta_\epsilon(x,t) \leqslant \frac{\mathcal{B}}{\epsilon}\chi_{(0,\epsilon)}(t) + \mathcal{C}. \tag{9}$$

Em (14) temos $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{C} \geqslant 0$, $\forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$. Ademais,

$$\inf_{\Omega\times[a,b]} \epsilon\zeta_\epsilon(x,\epsilon t) = \iota > 0 \ \ \textit{para } 0 < a < b \textit{ e } \iota \textit{ independente de } \epsilon.$$

Uma visão geral do trabalho

✓ A equação $(\mathrm{E})_{\varepsilon}$ possui solução minimal de viscosidade u^{ϵ};

Uma visão geral do trabalho

- ✓ A equação $(\mathrm{E})_\varepsilon$ possui solução minimal de viscosidade u^ϵ;
- ✓ A regularidade ótima é $C^{0,1}_{\mathrm{loc}}$, uma vez que $\|\nabla u^\epsilon\|_{L^\infty} \leqslant C_0$;

Uma visão geral do trabalho

- ✓ A equação $(\mathrm{E})_{\varepsilon}$ possui solução minimal de viscosidade u^{ϵ};
- ✓ A regularidade ótima é $C^{0,1}_{\mathrm{loc}}$, uma vez que $\|\nabla u^{\epsilon}\|_{L^{\infty}} \leqslant C_0$;
- ✓ $u^{\epsilon} \to u_0 \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}$ com $\mathcal{H}(x, u_0)F(x, D^2 u_0) = f_0$ em $\{u_0 > 0\}$;

Uma pergunta natural seria: as propriedades para o problema $(\mathrm{E})_{\varepsilon}$ são estáveis quanto à passagem do limite?

Estado da Arte

Inúmeras contribuições se sucederam a partir dos anos 80:

- $Lu = \Delta u$ - Lawy-Stampacchia, Nirenberg, Cafarrelli, etc (Início dos anos 80).

Estado da Arte

Inúmeras contribuições se sucederam a partir dos anos 80:

- $Lu = \Delta u$ - Lawy-Stampacchia, Nirenberg, Cafarrelli, etc (Início dos anos 80).
- $Lu = a_{ij} D_{ij} u + b_i D_i u + cu$, C^1-coeficientes — Berestycki, Cafarrelli e Nirenberg (1990).

Estado da Arte

Inúmeras contribuições se sucederam a partir dos anos 80:

- $Lu = \Delta u$ - Lawy-Stampacchia, Nirenberg, Cafarrelli, etc (Início dos anos 80).
- $Lu = a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu + cu$, C^1-coeficientes — Berestycki, Cafarrelli e Nirenberg (1990).
- $Lu = F(D^2u, x)$, Ricarte - Teixeira/ da Silva - Ricarte (Bordo) (2011/2015)

Estado da Arte

Inúmeras contribuições se sucederam a partir dos anos 80:

- $Lu = \Delta u$ - Lawy-Stampacchia, Nirenberg, Cafarrelli, etc (Início dos anos 80).
- $Lu = a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu + cu$, C^1-coeficientes — Berestycki, Cafarrelli e Nirenberg (1990).
- $Lu = F(D^2u, x)$, Ricarte - Teixeira/ da Silva - Ricarte (Bordo) (2011/2015)
- $Lu = |\nabla u|^p F(D^2u, x)$, Araújo-Ricarte - Teixeira. (2017)

Estado da Arte

Versões variacionais do problema superdeterminado acima são encontradas no trabalho de Alt-Caffarelli, de fato para o caso do laplaciano soluções do problema acima são obtidas como

$$\min_{H_0^1(\Omega), v|_{\partial\Omega}=g} \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + \chi_{\{u>0\}} \right) dx$$

Teorema (Alt-Caffarelli 1981-J. Reine Angew. Math.)

Teorema (Alt-Caffarelli 1981-J. Reine Angew. Math.)

- *Existe um mínimo* u_0 *para o funcional* $\mathcal{J}$.

Teorema (Alt-Caffarelli 1981-J. Reine Angew. Math.)

- *Existe um mínimo* u_0 *para o funcional* $\mathcal{J}$.
- $\Delta u_0 = 0$ *em* $\{u_0 > 0\}$.

Teorema (Alt-Caffarelli 1981-J. Reine Angew. Math.)

- *Existe um mínimo* u_0 *para o funcional* $\mathcal{J}$.
- $\Delta u_0 = 0$ *em* $\{u_0 > 0\}$.
- $u_0 \in C^{0,1}_{loc}$ *(Regularidade Ótima)*

Teorema (Alt-Caffarelli 1981-J. Reine Angew. Math.)

- *Existe um mínimo* u_0 *para o funcional* $\mathcal{J}$.
- $\Delta u_0 = 0$ *em* $\{u_0 > 0\}$.
- $u_0 \in C^{0,1}_{loc}$ *(Regularidade Ótima)*
- u_0 *é fortemente não-degenerada*

Teorema (Alt-Caffarelli 1981-J. Reine Angew. Math.)

- *Existe um mínimo* u_0 *para o funcional* $\mathcal{J}$.
- $\Delta u_0 = 0$ *em* $\{u_0 > 0\}$.
- $u_0 \in C^{0,1}_{loc}$ *(Regularidade Ótima)*
- u_0 *é fortemente não-degenerada*
- $\partial\{u_0 > 0\} \setminus \Sigma$ *é uma hipersuperífice suave;* $\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma) = 0$.

Teorema (Alt-Caffarelli 1981-J. Reine Angew. Math.)

- *Existe um mínimo* u_0 *para o funcional* $\mathcal{J}$.
- $\Delta u_0 = 0$ *em* $\{u_0 > 0\}$.
- $u_0 \in C^{0,1}_{loc}$ *(Regularidade Ótima)*
- u_0 *é fortemente não-degenerada*
- $\partial\{u_0 > 0\} \setminus \Sigma$ *é uma hipersuperífice suave;* $\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma) = 0$.
- $\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 1$ *em* $\partial\{u_0 > 0\} \setminus \Sigma$.

Guia da Viagem

[1] BEZERRA JÚNIOR, E.C.; DA SILVA, J.V. e RICARTE, G.C; Fully Nonlinear Singularly perturbed models with non-homogeneous degeneracy. **Rev. Mat. Iberoam.** (2022), published online first. DOI: 10.4171/RMI/1319.

Guia da Viagem

[1] BEZERRA JÚNIOR, E.C.; DA SILVA, J.V. e RICARTE, G.C; Fully Nonlinear Singularly perturbed models with non-homogeneous degeneracy. **Rev. Mat. Iberoam.** (2022), published online first. DOI: 10.4171/RMI/1319.

[2] DA SILVA J.V e RICARTE. G.C. Geometric gradient estimates for fully nonlinear models with non-homogeneous degeneracy and applications. **Calc. Var.** 59, 161 (2020).

Guia da Viagem

[1] BEZERRA JÚNIOR, E.C.; DA SILVA, J.V. e RICARTE, G.C; Fully Nonlinear Singularly perturbed models with non-homogeneous degeneracy. **Rev. Mat. Iberoam.** (2022), published online first. DOI: 10.4171/RMI/1319.

[2] DA SILVA J.V e RICARTE. G.C. Geometric gradient estimates for fully nonlinear models with non-homogeneous degeneracy and applications. **Calc. Var.** 59, 161 (2020).

[3] DA SILVA, J.V.; RICARTE G.C. e RAMPASSO, G.C. Global Regularity for a class of fully nonlinear pdes with unbalanced variable degeneracy. https://arxiv.org/abs/2108.08343

Notação

$$\mathcal{G}(x, \nabla u, D^2 u) \coloneqq \mathcal{H}(x, \nabla u) F(x, D^2 u)$$

Preliminares

Definição (Solução de Perron)

Fixado uma subsolução de viscosidade $u_\star$ *e uma supersolução de viscosidade* $u^\star$ *do problema* $(E)_\varepsilon$ *satisfazendo* $u_\star \leqslant u^\star$ *em* Ω*, então a solução de Perron de* $(E)_\varepsilon$ *é dada por*

$$u^\epsilon(x) = \inf\{w(x); w \text{ é supersolução de } (1) \text{ e } u_\star \leqslant w \leqslant u^\star\}$$

Preliminares

Teorema ($C^{1,\alpha}$ regularidade local)-Da Silva/ Ricarte / De Filippis

Seja F um operador satisfazendo $(A0)-(A2)$. Suponha ainda que as hipóteses (7) e (8) sejam consideradas. Seja u uma solução de viscosidade de limitada de

$$\mathcal{G}(x, \nabla u, D^2u) = f(x,u) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}).$$

Preliminares

Teorema ($C^{1,\alpha}$ regularidade local)-Da Silva/ Ricarte / De Filippis

Seja F um operador satisfazendo $(A0)-(A2)$. Suponha ainda que as hipóteses (7) e (8) sejam consideradas. Seja u uma solução de viscosidade de limitada de

$$\mathcal{G}(x, \nabla u, D^2 u) = f(x, u) \in L^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}).$$

Então, $u \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$. Ademais,

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Omega')} \leqslant C \cdot \left(\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + 1 + \|f\|^{\frac{1}{p+1}}_{L^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R})} \right)$$

para constantes universais $\alpha \in (0,1)$ and $C > 0$.

Se u é uma solução de viscosidade não-negativa de

$$\mathcal{G}(x, \nabla u, D^2 u) = f \in C^0(\Omega) \tag{10}$$

e as hipóteses (A0)-(A2), (6) e (8) valem. Então

(1) **Desigualdade de Harnack**: Se $f \in L^m(B_1) \cap C^0(B_1)$ com $m > N$, então

$$\sup_{B_{1/2}} u(x) \leqslant C \cdot \left\{ \inf_{B_{1/2}} u(x) + \max \left\{ \left\| \frac{f}{1+\mathfrak{a}} \right\|_{L^\infty(B_1)}^{\frac{1}{p+1}}, \left\| \frac{f}{1+\mathfrak{a}} \right\|_{L^\infty(B_1)}^{\frac{1}{q+1}} \right\} \right\}.$$

(2) **Estimativas gradiente**: Se $f \in L^\infty(B_1)$, então, $u \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(B_1)$ e

$$|\nabla u(0)| \leqslant C \cdot \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + 1 + \|f\|_{L^\infty(B_1)}^{\frac{1}{p+1}} \right)$$

Lema (Hopf não-homogêneo— da Silva, Ricarte,C.)

Suponha que as hipóteses (A0)-(A1) e (6) estão em voga. Seja u uma solução positiva de viscosidade para

$$\mathcal{G}(x, \nabla u, D^2u) = f(x) \quad em \quad B_R(z_0)$$

onde $f \in L^\infty(B_R(z_0))$. Assuma ainda que para algum $x_0 \in \partial B_R(z_0)$,

$$u(x_0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \leqslant \mathfrak{I},$$

onde ν é a direção normal interior em x_0.

Lema (Hopf não-homogêneo— da Silva, Ricarte,C.)

Suponha que as hipóteses (A0)-(A1) e (6) *estão em voga. Seja u uma solução positiva de viscosidade para*

$$\mathcal{G}(x, \nabla u, D^2 u) = f(x) \quad em \quad B_R(z_0)$$

onde $f \in L^{\infty}(B_R(z_0))$. Assuma ainda que para algum $x_0 \in \partial B_R(z_0)$,

$$u(x_0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \leqslant \mathfrak{I},$$

onde ν é a direção normal interior em x_0.
Então, para qualquer $r \in (0,1)$, existe uma constante C_0("universal") > 0 tal que

$$\sup_{B_{\frac{rR}{2}}(z_0)} u(x) \leqslant \mathrm{C}_0 R. \left\{ \mathfrak{I} + \max\left\{ (r^{p+2}R)^{\frac{1}{p+1}}, (r^{p+2}R)^{\frac{1}{q+1}} \right\} \Pi_{p,q}^{f, r^{p-q}\mathfrak{a}(z_0+rRx)} \right\}$$

Theorem 1 (**Estimativa ABP - Da Silva, Ricarte, C., C.**)

Assuma que as hipóteses (A0)-(A2) estão em vigor. Então, existe $C = C(N, \lambda, p, q, (\Omega)) > 0$ *tal que para qualquer* $u \in C^0(\overline{\Omega})$ *sub-solução de viscosidade (resp. supersolução) de* (10) *em* $\{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ *(resp.* $\{x \in \Omega : u(x) < 0\}$*, satisfisfaz*

$$\sup_{\Omega} u(x) \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^{+}(x) + C \cdot (\Omega) \max\left\{ \left\| \frac{f^{-}}{1+\mathfrak{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^{+}(u^{+}))}^{\frac{1}{p+1}}, \left\| \frac{f^{-}}{1+\mathfrak{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^{+}(u^{+}))}^{\frac{1}{q+1}} \right\},$$

$$\left(\textit{resp. } \sup_{\Omega} u^{-}(x) \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^{-}(x) + C \cdot (\Omega) \max\left\{ \left\| \frac{f^{+}}{1+\mathfrak{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^{+}(u^{-}))}^{\frac{1}{p+1}}, \left\| \frac{f^{+}}{1+\mathfrak{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^{+}(u^{-}))}^{\frac{1}{q+1}} \right\} \right)$$

Corolário (Da Silva, Ricarte,C.)

Seja u^{ε} uma solução de viscosidade não-negativa para $(E)_{\varepsilon}$. Então, existe uma constante universal $C > 0$ tal que

$$\|u^{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leqslant \|g\|_{L^{\infty}(\partial\Omega)} + \mathrm{C}\cdot(\Omega)\max\left\{\left\|\frac{\mathcal{B}_0}{1+\mathfrak{a}}\right\|_{L^N(\Omega)}^{\frac{1}{p+1}}, \left\|\frac{\mathcal{B}_0}{1+\mathfrak{a}}\right\|_{L^N(\Omega)}^{\frac{1}{q+1}}\right\}.$$

Resultados principais

Teorema 1 (Da Silva,Rampasso,Ricarte,C.)

Seja Ω um domínio limitado que satisfaz a condição uniforme da esfera interior e $0 \leqslant g \in C(\partial\Omega)$. Então, para cada $\epsilon > 0$ fixado existe uma solução não-negativa $u^{\epsilon} \in C(\Omega)$ para $(E)_{\varepsilon}$.

Teorema (Regularidade Lipschitz ótima)

Seja $\{u^\epsilon\}$ *uma solução de* $(E)_\varepsilon$. *Dado* $\Omega' \Subset \Omega$, *existe uma constante* $C_0 = C_0(universal)$ *mas independente de* ϵ, *tal que*

$$\|\nabla u^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega')} \leqslant C_0.$$

Ideia para a prova da Lipschitz Regularidade

A prova se baseia na obtenção de estimativas pontuais do gradiente a depender de onde o ponto x_0 está localizado; em suma: serão analisados os casos:

- $x_0 \in \Omega_\epsilon = \{0 \leqslant u^\epsilon \leqslant \epsilon\} \cap \Omega'$

Ideia para a prova da Lipschitz Regularidade

A prova se baseia na obtenção de estimativas pontuais do gradiente a depender de onde o ponto x_0 está localizado; em suma: serão analisados os casos:

- $x_0 \in \Omega_\epsilon = \{0 \leqslant u^\epsilon \leqslant \epsilon\} \cap \Omega'$
- $x_0 \in \Omega_\epsilon^c$

Ideia para a prova da Lipschitz Regularidade

A prova se baseia na obtenção de estimativas pontuais do gradiente a depender de onde o ponto x_0 está localizado; em suma: serão analisados os casos:

- $x_0 \in \Omega_\epsilon = \{0 \leqslant u^\epsilon \leqslant \epsilon\} \cap \Omega'$
- $x_0 \in \Omega_\epsilon^c$

Em cada um delas, toma-se um scalling da solução - levando em conta a região analisada - e com auxílio das estimativas para o gradiente, a desigualdade de Harnack, e, por fim o lema do tipo Hopf não-homogêneo deriva-se a estimativa desejada.

Observação

Para cada $\epsilon > 0$ *fixado, as soluções* u^{ϵ} *são de fato* $C^{1\,\alpha}_{loc}$, *como assegurado por da Silva e Ricarte em [2] ; não obstante, para qualquer* $0 < \xi \ll 1$ *pequeno, próximo das* ϵ*-camadas, segue que*

Observação

Para cada $\epsilon > 0$ *fixado, as soluções* u^{ϵ} *são de fato* $C^{1\,\alpha}_{loc}$*, como assegurado por da Silva e Ricarte em [2] ; não obstante, para qualquer* $0 < \xi \ll 1$ *pequeno, próximo das* ϵ*-camadas, segue que*

$$\|\nabla u^{\epsilon}\|_{C^{0,\xi}(\Omega')} \underbrace{\longrightarrow}_{\epsilon\to 0^{+}} \infty$$

Observação

Para cada $\epsilon > 0$ *fixado, as soluções* u^ϵ *são de fato* $C^{1\,\alpha}_{loc}$, *como assegurado por da Silva e Ricarte em [2] ; não obstante, para qualquer* $0 < \xi \ll 1$ *pequeno, próximo das* ϵ*-camadas, segue que*

$$\|\nabla u^\epsilon\|_{C^{0,\xi}(\Omega')} \underbrace{\longrightarrow}_{\epsilon \to 0^+} \infty$$

contudo, a norma Lipschitz de u^ϵ *permanece uniformemente controlada (independente de* ϵ*).*

Notação

Seja $x_0 \in \Omega \cap \{u^\epsilon > \epsilon\}$, define-se

$$d_\epsilon(x_0) = dist(x_0, \{u^\epsilon \leqslant \epsilon\}) \tag{11}$$

Teorema (Não-degenerescência)

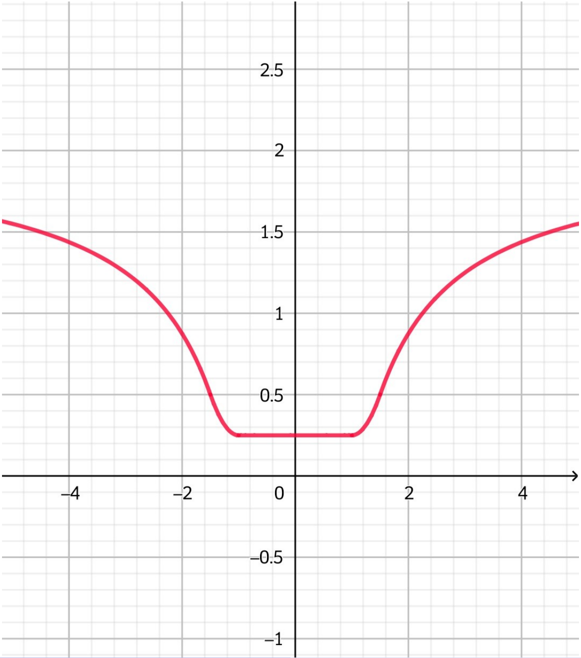
Seja $\{u^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ *uma solução de Perron de* $(E)_\varepsilon$*. Então existe* $c > 0$ *universal tal que, para* $x_0 \in \{u^\epsilon > \epsilon\}$ *e* $0 < \epsilon \ll d_\epsilon(x_0) \ll 1$ *vale*

$$cd_\epsilon(x_0) \leqslant u^\epsilon(x_0).$$

Prova da não-degenerescência

Ideia para a prova

A prova segue do uso da desigualdade de Harnack associada a construção de uma supersolução no sentido da viscosidade para o problema $(\mathrm{E})_{\varepsilon}$, comparando essa com a solução u^{ϵ}, obtém-se, por via de um argumento de contradição, um crescimento linear para a última limitando-a por baixo em termos da distância do ponto à ϵ-superfície de nível.


2.5
2
1.5
1
0.5
–0.5
–1
–4
–2
0
2
4

Consequências Geométricas

Corolário (Crescimento Linear)

Dado um subdomínio $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante universal $C' = C(\Omega') > 0$ tal para $X_0 \in \Omega' \cap \{u^\epsilon > \epsilon\}$ e $\epsilon \ll d_\epsilon(x)$, vale

$$c^{-1} d_\epsilon(X_0) \leqslant u^\epsilon(X_0) \leqslant C d_\epsilon(X_0)$$

Resultados Principais

Teorema (Não-degenerescência forte)

Dado $\Omega' \Subset \Omega$ *existe uma constante positiva* $c = c(universal)$ *tal que, para* $x_0 \in \{u^\epsilon > \epsilon\}$, $\epsilon \ll \rho \ll 1$, *vale*

$$c\rho \leqslant \sup_{B_\rho(x_0)} u^\epsilon \leqslant c^{-1}(\rho + u^\epsilon(x_0)).$$

Perfil Limite

Por fim, dedicamos a atenção ao perfil limite $u_0 = \lim_{\epsilon \to 0} u^\epsilon$, onde u^ϵ são as soluções minimais do problema $(\mathrm{E})_\varepsilon$.

Teorema (Perfil limite)

A função limite u_0 verifica

(1) $u_0 \in [0, K_0]$ *em* $\overline{\Omega}$ *para alguma constante* K_0("*universal*") > 0 *(independente de* ε*);*

(2) $u_0 \in C^{0,1}_{loc}(\Omega)$*;*

(3) $\mathcal{G}(x, \nabla u_0, D^2 u_0) = f_0(x)$ *em* $\{u_0 > 0\}$*, com* $0 \leqslant f_0 \in L^\infty(\Omega) \cap C^0(\Omega)$*.*

Perfil Limite

Ideia da prova

(1) A família u^{ϵ} é uniformemente limitada segundo a estimativa ABP e é pré-compacta na topologia $C^{0,1}_{loc}(\Omega)$;

Perfil Limite

Ideia da prova

(1) A família u^{ϵ} é uniformemente limitada segundo a estimativa ABP e é pré-compacta na topologia $C^{0,1}_{loc}(\Omega)$;

(2) Pela regularidade Lipschitz e a continuidade da norma L^{∞}, segue o item (2);

Perfil Limite

Ideia da prova

(1) A família u^{ϵ} é uniformemente limitada segundo a estimativa ABP e é pré-compacta na topologia $C^{0,1}_{loc}(\Omega)$;

(2) Pela regularidade Lipschitz e a continuidade da norma L^{∞}, segue o item (2);

(3) Usando a continuidade de u_0, a convergência uniforme de $u^{\epsilon} \to u_0$ em compactos, a natureza do termo fonte β_{ϵ} e por fim a estabilidade de soluções de soluções de viscosidade por limites uniformes segue o resultado.

Observação

Com efeito, $u_0 \in C^{1,\alpha}(\{u_0 > 0\})$. *Apesar disso a estimativa degenera quando se aproxima de* $\partial\{u_0 > 0\} \cap \Omega'$. *Contudo, pelo item* (2), *o gradiante permanece controlado, mesmo quando* x_0 *se aproxima da fronteira livre.*

Qual o comportamento de ∇u_0 ao longo de $\mathcal{F}(u_0)$?

No caso particular que o termo de reação é modelado segundo a teoria de propagação de chamas homogêneas, ou seja:

$$\zeta_\epsilon(t) := \frac{1}{\epsilon}\zeta\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

onde ζ é uma função contínua e suportada em $[0,1]$. Analisando a configuração limite da equação unidimensional associada ao nosso problema, ou seja:

$$(|u_x^\epsilon|^p + \kappa|u_x^\epsilon|^q)u_{xx}^\epsilon = \zeta_\epsilon(u^\epsilon) \quad \textit{para} \quad \kappa > 0. \tag{12}$$

Multiplicando (12) por $u_x^\epsilon dx$ e logo mais, fazendo a mudança de variável $w = u^\epsilon$. É possível mostrar que quando $\epsilon \to 0^+$, se verifica:

$$|u'(x_0)| \leqslant \min\left\{ \sqrt[p+2]{(p+2)\int_0^1 \zeta(s)ds},\ \sqrt[q+2]{\left(\frac{q+2}{\kappa}\right)\int_0^1 \zeta(s)ds} \right\}.$$

Teoria de regularidade para a fronteira livre

Uma classificação para a fronteira livre foi derivada por SILVA, RAMPASSO, RICARTE e VIVAS em [5]

$$\begin{cases} \mathcal{H}(x, \nabla u)F(x, D^2 u) & = & f(x) \text{ em } \Omega_+(u) \\ |\nabla u| & = & \mathrm{Q} \text{ em } \mathcal{F}(u). \end{cases}$$

Com as hipóteses apropriadas sobre F, Q e f, tal como condições estruturais sobre H, os autores derivaram:

$$\mathcal{F}(u) \quad \textit{Flatness/Lipshcitz} \Rightarrow C^{1,\beta}$$

Referências I

[1] ALT, H.W. e CAFFARELLI, L.A., Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. **J. Reine Angew. Math.** 325 (1981), 105-144.

[2] ARAÚJO, D.J.; RICARTE. G.C. e TEIXEIRA, E.V., Singularly perturbed equations of degenerate type. **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire**, 34 (2017), no. 3, 655-678.

[3] ARAÚJO, D.J., MAIA, A.F e URBANO, J.M., Sharp regularity for the inhomogeneous porous medium equation . **J. Anal. Math. 140** (2020), n. 2, 395-407.

[4] ARAÚJO, J.G., Sharp regularity for the degenerate doubly nonlinear parabolic equation. **J. Differential Equations**, 269 (2020), no. 12, 10558-10570.

Referências II

[5] DA SILVA, J.V.; VIVAS,H.; RAMPASSO, G.C.; RICARTE G.C. One phase free boundary problem with non-homogeneous degeneracy: regularity of solutions and free boundary. arXiv: 2103.11028. Por aparecer em Israel Journal of Mathematics.

[6] DIEHL, N.M.L, Improved regularity for the inhomogeneous porous medium equation. **J. Math. Anal. Appl.** 494 (2021), no. 1, 124593, 8 pp.

[7] URBANO, J.M, The method of intrinsic scaling, volume 1930 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag (2008).

[8] RICARTE, G.C e DA SILVA, J.V, Regularity up to the boundary for singularly perturbed fully nonlinear elliptic equations, **Interfaces and Free Bound.** 17 (2015), 317-332.

[9] RICARTE, G.C. e TEXEIRA, E.V., Fully nonlinear singular perturbed equations and asymptotic free boundaries. **J.Func.Anal.** 261, pp.1264-1673 (2011).