



XIV ENCONTRO CIENTÍFICO DE PÓS GRADUANDOS DO IMECC

07 A 10 DE OUT DE 2019 | IMECC - UNICAMP

BOLETIM DIGITAL



CeMEAI
CEPID - Centro de Ciências
Matemáticas Aplicadas à Indústria



Sumário

1	Apresentação	4
2	Agradecimentos	5
3	Comissões	6
I	Minicursos	
4	Minicursos	8
4.1	Introdução a análise de sobrevivência utilizando o R	8
4.2	Introdução ao LaTeX	8
II	Conferências	
5	Palestras Plenárias	10
5.1	Condições de otimalidade: teoria e aplicações	10
5.2	Porquês matemáticos e matemática visual no processo de ensino/aprendizagem	11
5.3	Do Cálculo I à unicidade de soluções de EDPs	12

5.4	Docência no ensino superior: uma conversa sobre formação acadêmica e a sala de aula	13
5.5	Hierarchical Regression Models: objective Bayesian Analysis	14
5.6	Teoria de representações de A a Z	15
5.7	Bioinformática e Estatística	16
5.8	The local principle of large deviations for compound Poisson process with catastrophes	17
6	Palestras de Divulgação	18
6.1	Ciência de Dados no Itaú : Contexto e Aplicações	18

III

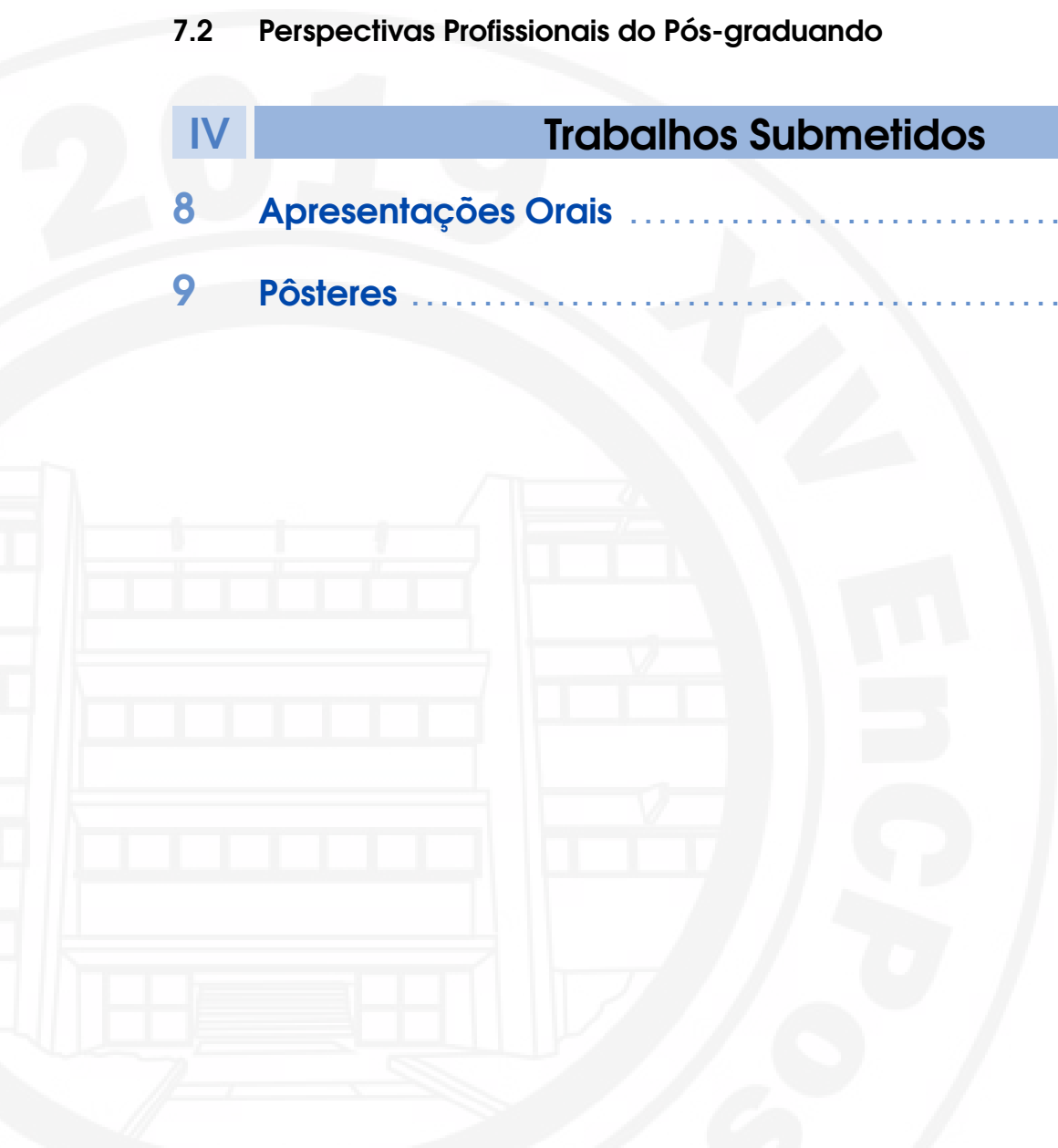
Mesas Redondas

7	Mesas Redondas	20
7.1	Mulheres na Matemática	20
7.2	Perspectivas Profissionais do Pós-graduando	20

IV

Trabalhos Submetidos

8	Apresentações Oraís	22
9	Pôsteres	42





Encontro Científico de Pós-Graduandos do



1. Apresentação

É com imensa satisfação que o Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), promove o XIV Encontro Científico dos Pós-Graduandos do IMECC, um evento de nível científico que tem como maior objetivo propiciar aos alunos de pós-graduação do instituto e de outras instituições uma oportunidade para divulgarem suas pesquisas. O evento deste ano contará com 8 palestras plenárias, uma palestra de divulgação, 2 minicursos, 9 sessões temáticas, além de sessão de pôsteres.

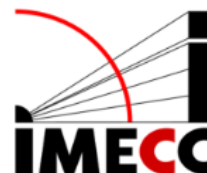
A Comissão Organizadora agradece a todos os participantes que prestigiarão o evento, e espera que o mesmo permaneça em suas próximas edições sendo uma oportunidade para a divulgação de trabalhos relevantes desenvolvidos por pesquisadores nacionais e estrangeiros do mais alto nível.

Realização





Encontro Científico de Pós-Graduandos do



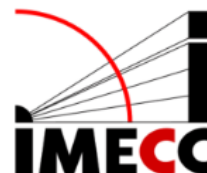
2. Agradecimentos

Ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), à Associação dos Pós-graduandos do IMECC (APG-IMECC), ao Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CEPID - CeMEAI) e à SEMAP

E, em especial, a todos os participantes do XIV Encontro Científico dos Pós-Graduandos do IMECC, por prestigiar o evento.



Encontro Científico de Pós-Graduandos do



3. Comissões

Comissão Organizadora

Profa. Dra. Kelly Cristina Poldi
Profa. Dra. Sandra Augusta Santos
Prof. Dr. Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira
Prof. Dr. Marcelo S. Montenegro

Acacio Neckel
Ma. Angélica Lourenço Oliveira
Jean Carlos A. Medeiros
Josué dos Santos da Conceição
Ma. Julieth Paola Saavedra Ramirez
Me. Rodolfo Anibal Lobo Carrasco

Comissão Científica

Prof. Dr. Adriano Da Silva
Prof. Dr. Aurélio R. L. Oliveira
Prof. Dr. Christophe Frédéric Gallesco
Prof. Dr. Filidor Edilson Vilca Labra
Profa. Dra. Gabriela Del Valle Planas
Profa. Dra. Hildete Prisco Pinheiro
Prof. Dra. Maria Amélia N. Schleicher
Prof. Dr. Plamen E. Kochloukov
Prof. Dr. Roberto Andreani



Minicursos

4	Minicursos	8
4.1	Introdução a análise de sobrevivência utilizando o <i>R</i>	
4.2	Introdução ao LaTeX	



4. Minicursos

4.1 Introdução a análise de sobrevivência utilizando o *R*

Prof. Dr. Rafael Pimentel Maia
IMECC-UNICAMP

Resumo

Esse minicurso tem como objetivo introduzir o conceito Análise de Sobrevivência e suas principais técnicas, paramétricas e não paramétricas, com aplicações em exemplos ilustrativos utilizando o software *R*. Os métodos de Análise de Sobrevivência se aplicam quando a variável de interesse é o tempo até a ocorrência de um evento determinado.

4.2 Introdução ao LaTeX

Ma. Angélica Lourenço Oliveira e Jean Carlos A. Medeiros
IMECC-UNICAMP

Resumo

Esse minicurso tem como objetivo apresentar uma introdução ao LaTeX. Neste minicurso serão apresentados alguns conceitos básicos essenciais para a criação de um documento científico.



Conferências

5	Palestras Plenárias	10
5.1	Condições de otimalidade: teoria e aplicações	
5.2	Porquês matemáticos e matemática visual no processo de ensino/aprendizagem	
5.3	Do Cálculo I à unicidade de soluções de EDPs	
5.4	Docência no ensino superior: uma conversa sobre formação acadêmica e a sala de aula	
5.5	Hierarchical Regression Models: objective Bayesian Analysis	
5.6	Teoria de representações de A a Z	
5.7	Bioinformática e Estatística	
5.8	The local principle of large deviations for compound Poisson process with catastrophes	
6	Palestras de Divulgação	18
6.1	Ciência de Dados no Itaú : Contexto e Aplicações	



5. Palestras Plenárias

5.1 Condições de otimalidade: teoria e aplicações

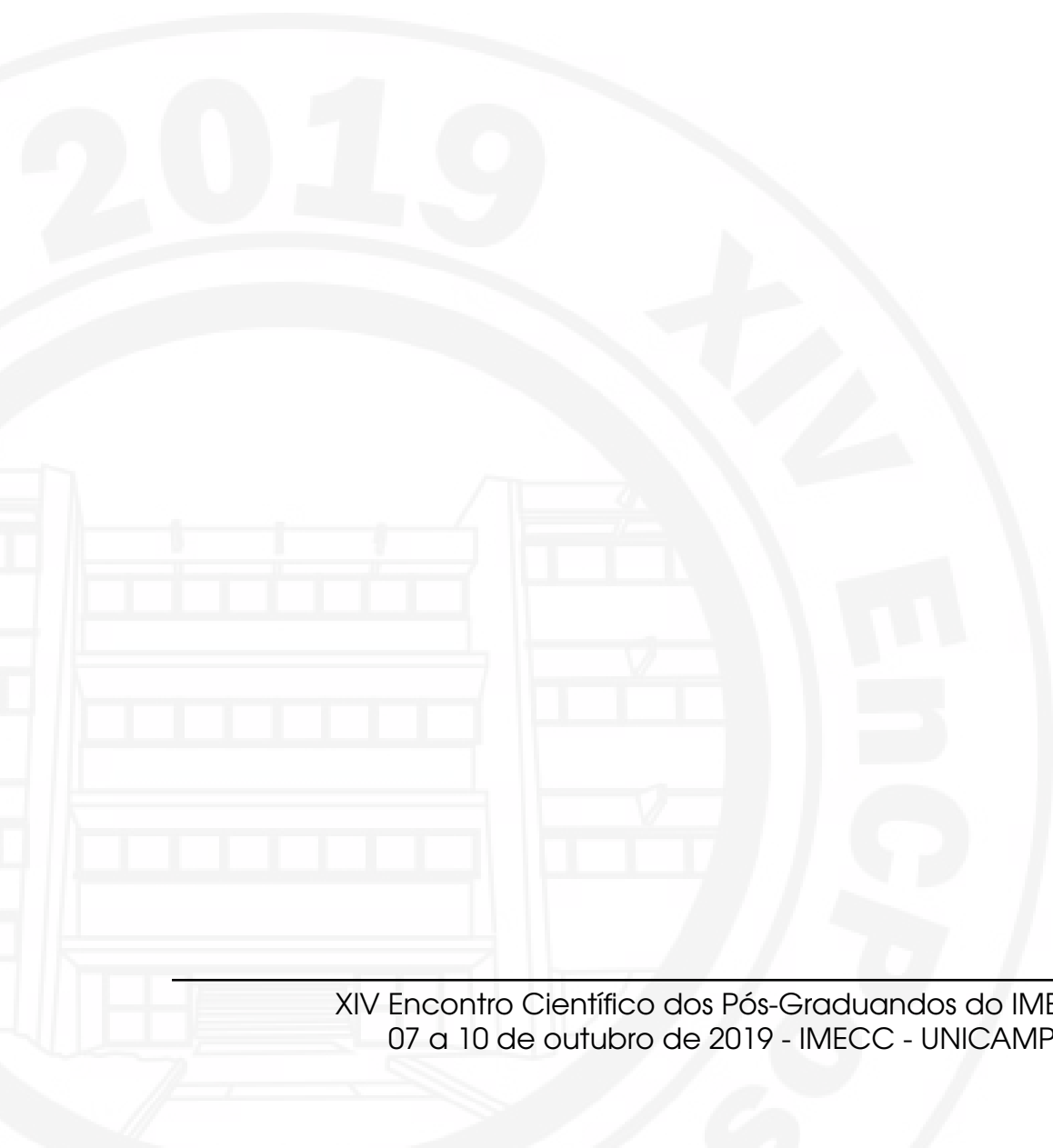
Prof^a. Dr^a. María Laura Schuverdt
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Resumo

Sabemos que as soluções de problemas gerais de otimização podem ser encontradas utilizando diferentes esquemas e métodos numéricos. Assim, a resolução de estos problemas precisa do estudo de condições de otimalidade apropriadas, da escolha de um método algorítmico adequado, do análisis da teoría de convergência e de experimentos numéricos com problemas típicos e de la vida real. Nos últimos anos se han definido novas condições necesarias de otimalidade de primeira ordem, llamadas condições sequencias, as quais estão íntimamente ligadas à convergência de algoritmos práticos e que, apesar que na sua definição não dependem de uma condição de qualificação, possuem uma condição de qualificação “companheira” associada. Na presente charla vamos apresentar a condição de otimalidade sucesiva associada com a conhecida condição de qualificação quasi-normalidade e mostraremos relaciones con otras condições e algunas aplicações.

5.2 Porquês matemáticos e matemática visual no processo de ensino/aprendizagem

Prof. Dr. Sérgio Lorenzato
FE - UNICAMP



5.3 Do Cálculo I à unicidade de soluções de EDPs

Prof. Dr Ederson Moreira dos Santos
USP - São Carlos

Resumo

Nesta palestra começaremos relembando alguns resultados de Cálculo I, como por exemplo: O Teorema de Rolle; Que o conjunto dos pontos críticos de uma função diferenciável estritamente convexa definida em um intervalo aberto de \mathbb{R} é unitário ou vazio. Faremos a leitura destes resultados em um contexto mais geral, para funções definidas em espaços de Banach. Com isto chegaremos a resultados importantes do Cálculo das Variações, como o Teorema do Passo da Montanha, onde soluções de EDPs são identificadas com pontos críticos de funcionais. Também provarei um critério para a unicidade de pontos críticos que satisfazem condições como positividade, limitação, ou massa fixada. Tal critério é baseado em propriedades de convexidade ao longo de caminhos apropriados e generaliza de forma significativa alguns resultados clássicos do Cálculo das Variações. Como aplicação, apresentarei uma prova unificada para uma variedade de resultados bem-conhecidos envolvendo EDPs elípticas, assim como novos teoremas para operadores do tipo curvatura média, Laplacianos fracionários, Sistemas Hamiltonianos, Equações de Schrödinger, e Sistema de Gross-Pitaevski.

5.4 Docência no ensino superior: uma conversa sobre formação acadêmica e a sala de aula

Prof^ª. Dr^ª. Maria Beatriz Ferreira Leite
PUC-Campinas

Resumo

Esta conversa tem como proposta, a partir do relato da minha trajetória profissional na docência no ensino superior, considerar aspectos sobre a formação acadêmica e a atuação do professor de matemática, no âmbito do ensino, pesquisa e gestão. Falar sobre minha experiência docente requer falar não apenas dos desafios cotidianos que se apresentam na sala de aula, mas de uma busca e de uma inquietude contínua. Olhar o exercício do ensinar e do aprender como uma “atitude de pesquisa” possibilita ver a prática pedagógica como um processo de construção e transformação.

5.5 Hierarchical Regression Models: objective Bayesian Analysis

Prof. Dr. Helio dos Santos Migon
DME - UFRJ

Resumo

We will start this talk with some examples of projects developed during a long career in Industry and Academia. They were the inspiration for various methodological and theoretical developments during academic life. We will introduce the regression models, hierarchical regression with varying parameters, we will also discuss aspects of robustness, and conclude with recent contributions to objective a priori distribution.

5.6 Teoria de representações de A a Z

Prof. Dr Vyacheslav Futorny
IME-USP

Resumo

O objetivo é dar uma introdução a teoria de representações de estruturas algébricas com motivações, avanços e problemas em aberto.

5.7 Bioinformática e Estatística

Prof^a. Dr^a. Samara Flamini Kiihl
USP-São Carlos

Resumo

Breve introdução a alguns problemas em Bioinformática e exemplos de contribuições da Estatística na área. A interação entre biólogos, estatísticos, matemáticos e cientistas da computação tem trazido grandes avanços na área de Bioinformática. O objetivo da palestra é incentivar os novos pesquisadores, principalmente na área de Estatística e Matemática Aplicada e Computacional, a se envolverem com o tema.

5.8 The local principle of large deviations for compound Poisson process with catastrophes

Prof. Dr. Anatoly Yambartsev
USP- São Paulo

Resumo

The continuous time Markov process considered here belongs to a class of population models with linear growth and catastrophes. There, the catastrophes happen at the arrival times of a Poisson process, and at each catastrophe time, a randomly selected portion of the population is eliminated. For this population process, we derive an asymptotic upper bound for the maximum value and prove the local large deviation principle.



Encontro Científico de Pós-Graduandos do



6. Palestras de Divulgação

6.1 Ciência de Dados no Itaú : Contexto e Aplicações

Me. Kléber Aderaldo Benatti
ITAÚ

Envolvendo conhecimentos de várias áreas, a Ciência de Dados tem ganhado força nos últimos anos pelo seu grande potencial em aplicações reais, impulsionando diversos seguimentos. Nesta apresentação veremos qual é o papel do cientista de dados no Itaú, além aplicações reais de técnicas de Ciência de Dados.



Mesas Redondas

7	Mesas Redondas	20
7.1	Mulheres na Matemática	
7.2	Perspectivas Profissionais do Pós-graduando	



7. Mesas Redondas

7.1 Mulheres na Matemática

Juliane Carolina Baiochi Dalben (IMECC-UNICAMP)

Profa. Dra. Maria Laura Schuverdt (UNLP)

Dra. Sara Díaz Cardell (IMECC-UNICAMP)

7.2 Perspectivas Profissionais do Pós-graduando

Dr. Darcy Gabriel Augusto Camargo Cunha (WIS-Israel)

Prof. Me. Fabio Rodrigues Silva (UEMG)

Prof. Dr. Henrique N. Sá Earp (IMECC-UNICAMP)

Ma. Melissa de Moraes Carvalho (ELDORADO).

IV Trabalhos Submetidos

8	Apresentações Oraís	22
9	Pôsteres	42



8. Apresentações Orais

Use os links abaixo para navegar nas Apresentações Orais

- HIV/AIDS Mathematical Model Based on Virus Load and Effectiveness in ART Treatment
 - Cristian Camilo Espitia
- Long-time smooth solutions for the periodic 3D-Boussinesq system with mixed initial data in Besov spaces
 - Leithold Louis Aurazo Alvarez
- Condições sequenciais de otimalidade em Otimização Contínua
 - Leonardo Delarmelina Secchin
- Detecção de bordas usando morfologia matemática fuzzy intervalar
 - Lisbeth Corbacho Carazas
- Equação de Navier-Stokes tempo-fracionária
 - José Vanterler da Costa Sousa
- Piecewise Linear Dynamics with Double Discontinuity
 - Guilherme Tavares da Silva
- Peças de um quebra-cabeça para demonstrar teoremas
 - Marcos Henrique de Paula Dias da Silva
- Métodos MCMC em Campos Aleatórios de Markov e aplicações a dados de imagens
 - Victor Freguglia
- smoothing of nonsmooth differential systems near regular-tangential singularities and boundary limit cycle
 - Gabriel Alexis Rondón Vielma

HIV/AIDS Mathematical Model Based on Virus Load and Effectiveness in ART Treatment

Cristian Camilo Espitia Morillo¹, João Frederico da Costa Azevedo Meyer², Rodolfo Anibal Lobo Carrasco³

¹PhD student of Applied Mathematics, IMECC, University of Campinas, Sao Paulo, Brazil.

²Department of Applied Mathematics, IMECC, University of Campinas, Sao Paulo, Brazil.

³PhD student of Applied Mathematics, IMECC, University of Campinas, Sao Paulo, Brazil.

HIV/AIDS treatment exists to keep the viral load at an undetectable level to prevent the transmission of its virus. The antiretroviral therapy (ART) allows an extended life span for a treated person, keeping the viral load under control, even for patients who had low adherence to the treatment and return to take it in the appropriate way. In this sense, our work take as a main hypotheses the effectiveness of ART treatment. The aim of this work is to represent the HIV/AIDS population dynamics using a deterministic mathematical model of non linear ordinary differential equations. We specifically study sexual, injectable drug users and vertical transmission. We present a model considering viral load as the main characteristic to determine the different stages of the infection. The mathematical model is presented, the basic reproduction number is analyzed and some numerical simulations were made.

Palavras-chave: Human Immunodeficiency Virus HIV, Acquired Immunodeficiency Syndrome AIDS, Viral Load, Mathematical Epidemiology.

Introduction

HIV is transmitted sexually by contact with infected body fluids such as blood, semen, vaginal or rectal fluids; vertically from an infected mother to a child during pregnancy, birth or lactation; by injectable drug users sharing needles with infected blood and by blood transfusion [2]. Several measures have been used to control the spread of the virus, such as educational campaigns about the use of condoms, voluntary HIV testing, access to sterile syringes for drug users and antiretroviral therapy for infected and exposed people. Nevertheless, the antiretroviral therapy has proven to be the most effective and used because, in addition to extending the life of the infected patient by delaying the onset of symptoms, it keeps the viral load at undetectable levels, making it possible to have a normal sexual life [4].

The present research shows a system of Ordinary Differential Equations to model the dynamics in a population exposed to contagion, considering different viral loads whether or not enrolled in an ART treatment. According to the objective for HIV proposed by UNAIDS [3], 90% of the treated people have an undetectable viral load, in this way, 10% don't take the allocated

¹espitiacristian@gmail.com

²joni@ime.unicamp.br

³rodolfoolobo@ug.uchile.cl

drugs or the HIV virus is resistant to the treatment. Life expectancy for people living with HIV enrolled in an antiretroviral therapy with good adherence to treatment, and consequently with undetectable viral load, is better than that of people with a detectable viral load [1, 4].

Mathematical model

This model considers 6 disjoint classes: $S(t)$ susceptible people who can be infected, $I(t)$ infected people who can infect others, $T_d(t)$ treated people with detectable viral load and poor adherence to treatment, $T_u(t)$ treated people with undetectable viral load, $A_u(t)$ people treated living with AIDS with undetectable viral load and $A_d(t)$ people living with AIDS with detectable viral load. $D(t)$ means the population with detectable viral load given by $D(t) = I(t) + T_d(t) + A_d(t)$, and the total population given by $N(t) = S(t) + I(t) + T_d(t) + T_u(t) + A_u(t) + A_d(t)$.

The infection forces are two, due to sexual and by injectable drug users transmission, they depends upon the detectable population and they are given by

$$\lambda_s = \beta_s c_s \frac{I + T_d + A_d}{N} \quad \text{by sexual transmission, and}$$

$$\lambda_n = \beta_n c_n \frac{I + T_d + A_d}{N} \quad \text{by injectable drug users.}$$

The dynamic is governed by the following non linear ordinary differential equation system (0.1).

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Psi + \eta(T_u + A_u) + \eta(1 - v)(I + T_d + A_d) - (\lambda + \mu)S \\ \frac{dI}{dt} &= v\eta(I + T_d + A_d) + \lambda S - (\alpha + \mu)I \\ \frac{dT_u}{dt} &= \alpha p \tau I + b A_u - (\delta_u + \mu)T_u \\ \frac{dT_d}{dt} &= \alpha p(1 - \tau)I - (\delta_d + \mu)T_d \\ \frac{dA_u}{dt} &= \delta_u T_u + \gamma A_d - \left(b + \mu + \frac{d}{4}\right)A_u, \\ \frac{dA_d}{dt} &= \delta_d T_d + \alpha(1 - p)I - (\gamma + \mu + d)A_d \end{aligned} \tag{0.1}$$

The basic reproduction number is

$$R_0 = \frac{\beta \left[a_3(a_5 + \alpha(1 - p)) + \alpha p(1 - \tau)(a_5 + \delta_d) \right]}{a_3 \left[a_1 a_5 - \alpha \eta v(1 - p) \right] - \alpha \eta v p(1 - \tau)(a_5 + \delta_d)} \tag{0.2}$$

where $a_1 = \alpha + \mu - v\eta$, $a_2 = \delta_u + \mu$, $a_3 = \delta_d + \mu$, $a_4 = b + \mu + \frac{d}{4}$, $a_5 = \gamma + \mu + d$.

Conclusions

Our contribution is to define a model based on the virus quantity to establish the difference between populations, particularly, by giving importance to the detectability and effectiveness of ART treatment. For this purpose, we have constructed a model which represents a general behavior of the HIV infection of injectable drugs, sexual and vertical transmissions. Thus, given system (0.1) and subsequently R_0 , it is possible to conclude that β_n, c_n become essential for the dynamics. In fact, the basic reproduction number is directly proportional to these parameters, see equation (0.2). Therefore an analysis of the basic reproduction number showed that fixing all the others parameters, the non-epidemic region is smaller than the epidemic region, concluding that parameter β_n (infection probability in injectable drug transmission) is less sensitive than c_n (rate of drug users sharing needle)

Referências Bibliográficas

- [1] AIDSMAP. (2018). Life expectancy for people living with HIV. England. Recovered from <https://www.aidsmap.com/about-hiv/life-expectancy-people-living-hiv>.
- [2] Aldila, Dipo and others. Mathematical model for HIV spreads control program with ART treatment, *Journal of Physics: Conference Series.*, 2018. DOI: 10.1088/1742-6596/974/1/012035.
- [3] UNAIDS. (2016). Accession cities to the Paris Declaration already has 35 mi of Brazilian men and women. Brazil. Recovered from <https://unaids.org.br/2016/03/adesao-de-cidades-a-declaracao-de-paris-ja-beneficia-35-mi-de-brasileiras-e-brasileiros-hiv-aids/>.
- [4] Ministério de Saúde do Brasil, Protocolo clínico e diretrizes terapêuticas para manejo da infecção pelo HIV em adultos, 2018.

Long-time smooth solutions for the periodic 3D-Boussinesq system with mixed initial data in Besov spaces

Leithold L. A. Alvarez¹, Lucas C. F. Ferreira²

²Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Brasil

We establish a kind of nonlinear condition on the initial data, in order to find long-time smooth solutions of the periodic tridimensional Boussinesq system. This nonlinear condition permit us to take mixed initial data in the scale invariant space $B_{\infty,\infty}^{-1} \times B_{\infty,\infty}^{-3}$. Also a family of examples of mixed initial data is given, satisfying these nonlinear relations, to build long-time smooth solutions.

Palavras-chave: Boussinesq system, Mixed initial data, Long-time smooth solutions, Besov spaces, Bony's decomposition.

Introdução

In this paper we consider the natural convection in a viscous incompressible fluid described by the initial value problem for the three-dimensional Boussinesq system

$$(BQ) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u = \nabla p + g \cdot \theta \\ \partial_t \theta - \Delta \theta + u \cdot \nabla \theta = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \\ \theta|_{t=0} = \theta_0, \end{cases} \quad (0.3)$$

where u is a mean free three-component vector field $u = (u^1, u^2, u^3) = (u^h, u^3)$, p and θ are scalar fields representing the velocity, the pressure and the temperature of the fluid, respectively; being all these quantities unknown functions of the space variable $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{T}^3$ and the time variable $t \in (0, T)$, for some fixed positive real number T . Also, (u_0, θ_0) is the given initial data and g is the given constant vector representing the acceleration of gravity. Here, just for simplicity, we are choosing the kinematic viscosity and the thermal diffusion coefficient as being one. The Boussinesq system has important roles in the atmospheric sciences as well as a model in many geophysical applications.

In the case that θ is identically zero we are dealing with the Navier-Stokes equations (NS), so that we cannot hold to get a better theory than one for the (NS) system.

Since J. Leray the existence of global weak solution in the energy space for the (NS) system is established. When the dimension is two we have the global wellposedness as long as if the dimension is three we have many results about the global existence of solutions when the size of the initial data is small enough in some critical space. There exists conditional regularity and blow-up criteria for weak or strong solutions.

Boussinesq equations has been extensively studied, recently. In the bidimensional case we have global well-posedness too and there are many studies considering partial viscosities. In the tridimensional case there are a few results about global existence. Also there are conditional regularity and blow-up criteria for the system (BQ), most of them similar to the one for the (NS) system.

In the last years we have seen some studies about the existence of global regular solutions for the (NS) system, when the initial data is taken arbitrarily large in the maximal critical space for the system, the Besov space $B_{\infty,\infty}^{-1}$; these kind of initial data have a particular structure, for instance, have oscillations or small variations in one direction

¹ra153116@ime.unicamp.br

²lcff@ime.unicamp.br

(see [3] , [4] and [5]). In particular, in the work of Chemin and Gallagher [2], they set a nonlinear condition on the initial data to get a global well-posedness result for a class of large initial data, with oscillations, in the space $B_{\infty,\infty}^{-1}(\mathbb{T}^3)$. To the knowledge of the authors there is no work using these ideas for the Boussinesq system.

In this work, we are interested in the size of the initial data, in order to get a long-time existence result of smooth solutions to the system (BQ), following ideas from [2], instead of the minimal regularity conditions the initial data can assume.

We will get a nonlinear condition on the initial data, that give us a long-time existence result of smooth solutions for the system (BQ); this nonlinear condition permit us to choose what we call as mixed initial data, a data of the kind large-small, in the maximal critical space associated to the system (BQ), $B_{\infty,\infty}^{-1} \times B_{\infty,\infty}^{-3}$.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Bahouri, J-Y. Chemin and R. Danchin, Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, (2011).
- [2] J-Y. Chemin and I. Gallagher, On the global wellposedness of the 3-D Navier-Stokes equations with large initial data. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 39 (4), (2006), 679–698.
- [3] J-Y. Chemin and I. Gallagher, Wellposedness and stability results for the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 . Annales de l'Institut Henri Poincaré, 26 (2), (2009), 599–624
- [4] J-Y. Chemin and I. Gallagher, Large, global solutions to the Navier-Stokes equations, slowly varying in one direction. Transactions of the American Mathematical Society, 362 (6), (2010), 2859–2873
- [5] J-Y. Chemin and I. Gallagher, Global regularity for some classes of large solutions to the Navier-Stokes equations. Annals of Mathematics, 173 (2), (2011), 983–1012
- [6] P. Germain, Solutions fortes, solutions faibles d'équations aux dérivées partielles d'évolution. These de Doctorat de L'École Polytechnique, (2005).

Condições sequenciais de otimalidade em Otimização Contínua

Leonardo D. Secchin¹

¹Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, Brasil

Condições sequenciais de otimalidade constituem-se como ferramentas adequadas à análise teórica da convergência de algoritmos de otimização, estão ligadas a critérios práticos de parada, e têm recebido crescente atenção da comunidade acadêmica nos últimos anos. Neste trabalho revisitamos algumas das condições definidas na literatura, bem como apresentamos contribuições recentes do autor.

Palavras-chave: condições sequenciais de otimalidade, programação não linear, algoritmos

Introdução

Consideramos o problema geral de *programação não linear*

$$\min_x f(x) \quad \text{sujeito a} \quad h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0, \quad (\text{PNL})$$

onde as funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são continuamente diferenciáveis. Resolver (PNL) significa encontrar um x^* que seja *viável*, ou seja, que satisfaça as *restrições* $h(x^*) = 0$ e $g(x^*) \leq 0$, e que, dentre todos os pontos viáveis x , minimize a *função objetivo* f , isto é, $f(x^*) \leq f(x)$ para todo x viável. Neste caso, dizemos que x^* é minimizador (global) de (PNL). Com o foco na resolução computacional e na consequente dificuldade em garantir minimizadores, dado que isso implicaria avaliar f em um “conjunto denso”, voltamos nossa atenção à caracterizações algébricas e computacionalmente viáveis dos minimizadores de (PNL). A ferramenta utilizada para este fim pela comunidade há décadas são as conhecidas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), que generalizam a condição de Lagrange ensinada nos cursos de Cálculo. Dizemos que x^* é ponto KKT se for viável para (PNL) e se existirem *multiplicadores de Lagrange* $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tais que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0, \quad \mu_j^* \geq 0 \quad \text{e} \quad \mu_j^* g_j(x^*) = 0, \quad \forall j. \quad (0.4)$$

Essa caracterização seria completa se ocorresse em *todos* os minimizadores de (PNL), isto é, se fosse uma *condição necessária de otimalidade*. No entanto, não é o que sempre ocorre: no problema \min_x sujeito a $x^2 \leq 0$, o minimizador $x^* = 0$ não é ponto KKT. Curiosamente, para *qualquer* minimizador x^* e qualquer $\varepsilon > 0$, existe um ponto x (não necessariamente viável) e (λ, μ) que satisfazem (0.4) aproximadamente. Mais especificamente, $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$,

$$\left\| \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(x) \right\| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad |\min\{-g_j(x), \mu_j\}| \leq \varepsilon, \quad \forall j. \quad (0.5)$$

As condições (0.5) naturalmente permitem caracterizar minimizadores via sequências $\{x^k\}$, com $\varepsilon_k \downarrow 0$, *sem a necessidade de hipóteses sobre o problema* como KKT requer. O leitor pode verificar que isso ocorre no pequeno exemplo descrito anteriormente para as sequências $x^k = -1/k$ e $\mu^k = k/2$ (observe

¹leonardo.secchin@ufes.br,

que $\mu^k \rightarrow \infty$, o que reflete a inexistência de multiplicadores de Lagrange *para o ponto x^**). Ou seja, temos condições necessárias de otimalidade legítimas. Tais condições são conhecidas como *condições sequenciais de otimalidade*. Em tempo, (0.5) representa a condição conhecida como *aproximadamente KKT* (AKKT), definida em [4].

Objetivos

É possível agregar mais informações às inequações (0.5) de modo a obter condições sequenciais mais ricas, que descrevam melhor os minimizadores de (PNL). Melhoramentos foram propostos na literatura, alguns inclusive por este autor. O objetivo da exposição é apresentar algumas das diferentes condições sequenciais de otimalidade, a saber, *Complementary Approximate KKT* (CAKKT) [5] e *Positive Approximate KKT* (PAKKT) [2]. É importante ressaltar que uma condição sequencial de otimalidade representa não só uma caracterização teórica dos minimizadores de (PNL), mas também, do ponto de vista mais prático, um critério de parada para algoritmos. Desta forma, uma condição sequencial se justifica pela sua aplicabilidade no estudo da convergência de algoritmos de otimização. Em particular, as condições acima citadas estão relacionadas à métodos de Lagrangeano Aumentado, notadamente o definido em [1].

Por outro lado, problemas de otimização com estrutura específicas requerem um estudo especial. É o caso dos *problemas de programação matemática com restrições de complementaridade* (do inglês, MPCC), que contém restrições do tipo $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $ab \leq 0$. Tais problemas têm um nível de degeneração que limita o uso de condições sequenciais como AKKT. Ainda assim, o estudo da convergência de métodos em MPCCs pode ser tratado via condições sequenciais específicas para este problema, como as definidas em artigo recente (ainda não publicado) deste autor. Consulte [3]. Condições sequenciais foram definidas ainda para outros contextos específicos, tais como programação semidefinida, otimização não suave e programação multiobjetivo. Isso mostra que o tema é atual e vem recebendo atenção da comunidade acadêmica nos últimos anos.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez, e M. L. Schuverdt. On augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 18(4):1286–1309, 2007.
- [2] R. Andreani, N. Fazzio, M. L. Schuverdt, e L. D. Secchin. A sequential optimality condition related to the quasi-normality constraint qualification and its algorithmic consequences. *SIAM Journal on Optimization*, 29(1):743–766, 2019.
- [3] R. Andreani, G. Haeser, L. D. Secchin, e P. J. S. Silva. New sequential optimality conditions for mathematical problems with complementarity constraints and algorithmic consequences. 2018. Submetido.
- [4] R. Andreani, G. Haeser, e J. M. Martínez. On sequential optimality conditions for smooth constrained optimization. *Optimization*, 60(5):627–641, 2011.
- [5] R. Andreani, J. M. Martínez, e B. F. Svaiter. A new sequential optimality condition for constrained optimization and algorithmic consequences. *SIAM Journal on Optimization*, 20(6):3533–3554, 2010.

Detecção de bordas usando morfologia matemática fuzzy intervalar

Lisbeth Corbacho Carazas¹, Peter Sussner²,

^{1,2}Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMECC, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo-Brasil

Uma imagem digital possui incertezas e imprecisões inerentes ao processo de digitalização. Lopez-Molina et al. [1] modelaram esta imprecisão em forma de imagem intervalar para depois utilizá-las na detecção de bordas da imagem. A importância das bordas de uma imagem concentra-se na simplificação da análise das imagens e na redução drástica da quantidade de dados a serem processados. Suas aplicações encontram-se nas áreas da geografia, medicina, robótica, reconhecimento de padrões, etc.. Existem muitos métodos de detecção de bordas, dentre os quais destacam-se os baseados na lógica fuzzy, como são: a inferência fuzzy [2], morfologia fuzzy [3], morfologia fuzzy intervalar [4], etc.; ou os métodos clássicos como: Canny, Roberts, Sobel, etc..

Embora existam diversas técnicas para extração de bordas, neste trabalho foi utilizado a morfologia fuzzy intervalar, dado que a inerente incerteza na imagem pode ser modelada em termos da imagem intervalar. Assim, vista esta imagem intervalar como um conjunto intervalar fuzzy, pode ser processada usando técnicas desta teoria, como por exemplo determinar o gradiente da imagem intervalar a partir da diferença entre a dilatação e a erosão fuzzy intervalar, essa diferença esta baseada na diferença de intervalos [5]. Para efeitos do cálculo das bordas da imagem, tal que cumpram as condições de Canny, precisa-se um tipo de redução da imagem gradiente fuzzy intervalar numa imagem gradiente fuzzy e sobre essa imagem gradiente fuzzy utilizam-se os processos de supressão não máximo seguida da histereses. Como consequência desse processo obtêm-se uma imagem binária com a linha borda de um pixel de largura (se o pixel pertence à borda possui valor 1, caso contrario é 0), que chama-se imagem borda.

Neste trabalho, além de propor uma representação da imagem digital como uma imagem intervalar considerando a incerteza, contorna-se o problema de redução da imagem fuzzy intervalar com uma abordagem diferente à de calcular o gradiente intervalar fuzzy, da seguinte forma: calculamos a erosão e dilatação intervalar, depois reduzimos a erosão e dilatação por meio da função de agregação K_α obtendo como resultado uma nova erosão e dilatação morfológica, onde a diferença (agora a usual) pode ser interpretada como o gradiente morfológico da imagem, o qual permitiria a aplicação convencional das técnicas de binarização para gerar uma imagem borda.

O desempenho do detetor bordas proposto (DBP) sobre 25 imagens, foi comparado com o clássico detetor de bordas Canny e com o detetor de bordas dada pela gradiente fuzzy, obtendo como resultado a seguinte tabela:

¹ra162526@ime.unicamp.br

²sussner@ime.unicamp.br

Detector de bordas	FoM
DBP (com S como elemento estrut.)	0.5831
DBP (com R como elemento estrut.)	0.5740
Gradiente Fuzzy (T_{nM}, I_{KD})	0.5625
Canny	0.4297

Table 8.1: Média dos valores FoM sobre 25 imagens dos detectores Canny e gradiente fuzzy comparado com o melhor valor FoM do método proposto.

Referências Bibliográficas

- [1] C. Lopez-Molina, C. Marco-Detchart, J. Cerron, H. Bustince, and B. De Baets, “Gradient extraction operators for discrete interval-valued data,” in *16th IFSA World Congress; 9th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology*, vol. 89, pp. 836–843, Atlantis Press, 2015.
- [2] T. Law, H. Itoh, and H. Seki, “Image filtering, edge detection, and edge tracing using fuzzy reasoning,” *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 18, no. 5, pp. 481–491, 1996.
- [3] P. Sussner and M. Valle, “Classification of fuzzy mathematical morphologies based on concepts of inclusion measure and duality,” *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 32, no. 2, pp. 139–159, 2008.
- [4] P. Sussner, M. Nachtegael, T. Mélange, G. Deschrijver, E. Esmi, and E. Kerre, “Interval-valued and intuitionistic fuzzy mathematical morphologies as special cases of L -fuzzy mathematical morphology,” *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 43, no. 1, pp. 50–71, 2012.
- [5] G. Deschrijver and C. Cornelis, “Representability in interval-valued fuzzy set theory,” *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 15, no. 03, pp. 345–361, 2007.
- [6] M. González-Hidalgo, S. Massanet, A. Mir, and D. Ruiz-Aguilera, “On the choice of the pair conjunction–implication into the fuzzy morphological edge detector,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 23, no. 4, pp. 872–884, 2015.

Equação de Navier-Stokes tempo-fracionária

J. Vanterler da C. Sousa¹, E. Capelas de Oliveira²,

^{1,2}Departamento de Matemática Aplicada, Imecc-Unicamp, Campinas, SP, 13083-859, Brasil

Investigamos a unicidade de soluções suaves para equação de Navier-Stokes tempo-fracionária na classe $C([0, \infty); L^N(\mathbb{R}^N)^N)$ por meio das estimativa $L^p - L^q$ de Giga-Shor e da desigualdade de Gronwall.

Palavras-chave: Unicidade; equação de Navier-Stokes tempo-fracionária; regularidade máxima; desigualdade de Gronwall.

Unicidade de soluções suaves

O cálculo fracionário é, de fato, uma área da análise matemática que tem se solidificado ao longo de décadas, devido sua importância e relevância, por sua base teórica bem fundamentada e construída, bem como, as inúmeras aplicações por meio de derivadas e integrais fracionárias [2, 3]. Nesse sentido, pesquisadores passaram a investigar existência, unicidade e regularidade de soluções suaves de equações de Navier-Stokes fracionárias, uma vez que os resultados obtidos são de grande destaque [1]. O projeto de unificar cálculo fracionário e equações de Navier-Stokes, é de fato algo que vem num crescente, pois novos e recentes trabalhos com resultados promissores têm sido apresentados. Neste trabalho temos como objetivo investigar a unicidade de soluções suaves para equação de Navier-Stokes tempo-fracionária N -dimensional conforme o problema Eq.(0.7), a seguir [4].

Então, considere a seguinte equação de Navier-Stokes tempo-fracionária N -dimensional no espaço \mathbb{R}^N ($N \geq 3$) dada por

$$\begin{cases} {}^C\mathbb{D}_t^\alpha u &= \Delta u - (u \cdot \nabla)u - \nabla p \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ (x, t) &\in \mathbb{R}^N \times (0, T) \end{cases} \quad (0.6)$$

onde ${}^C\mathbb{D}_t^\alpha u(\cdot)$ é a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1)$, $u = u(x, t) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$, $p(x, t) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é a pressão cujo papel é manter a divergência igual a 0, ∇ é o operador diferencial $(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N})$, $\nabla \cdot u$ é o divergente de u , Δ é o operador de Laplace, enquanto $(u \cdot \nabla)$ é o operador de derivação $u_1 \partial_{x_1} + u_2 \partial_{x_2} + \dots + u_N \partial_{x_N}$.

Também temos: $(u \cdot \nabla)u = \sum_j \partial_j (u^j u)$; $p = (-\Delta)^{-1} \sum_{j,k} \partial_j \partial_k (u^j u^k)$; $\mathbb{P} = I_d - \nabla \Delta^{-1} \nabla = I_d + R \otimes R$ onde $R = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \nabla$

é a transformada de Riesz e $R = (R_1, \dots, R_N)$, $\widehat{R}_j f = i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{f}$.

Aplicando o projetor \mathbb{P} em ambos os lados da Eq.(0.6) e usando a condição de divergência, temos $\mathbb{P}u = u$, $\mathbb{P} {}^C\mathbb{D}_t^\alpha u = {}^C\mathbb{D}_t^\alpha u$ e $\mathbb{P} \nabla p = 0$ e substituindo o termo $(u \cdot \nabla)u$ por $\nabla \cdot (u \otimes u) = (\nabla \cdot u)u + (u \cdot \nabla)u$, temos que a Eq.(0.6), na forma abstrata, é dada por

$$\begin{cases} {}^C\mathbb{D}_t^\alpha \mathbf{u} &= A_r \mathbf{u} + F(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (0.7)$$

onde $A_r \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}$ com $A_r : D(A_r) \subset L_\sigma^r \rightarrow L_\sigma^r$ é o operador de Stokes e $F(\mathbf{u}) = -\mathbb{P} \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$.

Seja M_α a função de Mainardi, dada por

$$M_\alpha(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k! \Gamma(1 - \alpha(1 + k))},$$

caso particular da função de Wright [1]. Vale o resultado:

¹vanterler@ime.unicamp.br

²capelas@ime.unicamp.br

Proposição 8.1 [1] Para $\alpha \in (0, 1)$, $-1 < r < \infty$, e M_α restrita à linha real positiva, $M_\alpha(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ temos

$$\int_0^\infty t^r M_\alpha(t) dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)}.$$

A solução suave da Eq.(0.7), é dada pela seguinte equação integral [4]

$$u(t) = \mathbb{E}_\alpha(t^\alpha \Delta) u_0 - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \Delta) \mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u)(\tau) d\tau \quad (0.8)$$

onde

$$\mathbb{E}_\alpha(t^\alpha \Delta) v(x) = \left((4\pi t^\alpha)^{-\frac{N}{2}} \int_0^\infty \theta^{-\frac{N}{2}} M_\alpha(\theta) \exp\left(\frac{-|\cdot|^2}{4\theta t^2}\right) d\theta * v \right)(x)$$

e

$$\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) v(x) = \left((4\pi t^\alpha)^{-\frac{N}{2}} \int_0^\infty \alpha \theta^{1-\frac{N}{2}} M_\alpha(\theta) \exp\left(\frac{-|\cdot|^2}{4\theta t^2}\right) d\theta * v \right)(x),$$

sendo $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$ e $\mathbb{E}_{\alpha\beta}(\cdot)$, funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, respectivamente.

Lema 1. [4] Seja $g \in L^q((0, T); L^p(\mathbb{R}^N)^{N^2})$ onde $1 < p, q < \infty$, $0 < T < \infty$. Então, existe uma única solução $v = (-\Delta)^{-1/2} u$ pertencente a $L^q((0, T); L^p(\mathbb{R}^N)^N)$ que resolve o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} {}^C \mathbb{D}_t^\alpha v - \Delta v &= \mathbb{P}(-\Delta)^{-1/2} \nabla \cdot g, \text{ quase todo } t \in (0, T) \\ v(0) &= 0, \end{cases}$$

satisfazendo as seguintes estimativas

$$\|\nabla u\|_{p,q,T} \leq C \|g\|_{p,q,T} \quad e \quad \|u\|_{\frac{pN}{N-p},q,T} \leq C \|g\|_{p,q,T}, \quad 1 < p < N$$

com $C = C(p, N, q) > 0$ independente de g e T .

Vamos investigar a unicidade de soluções suaves para equação de Navier-Stokes tempo-fracionária, por meio de estimativa, conforme o Lema 1, e também por meio da desigualdade de Gronwall, isto é, pelo Teorema 8.2.

Teorema 8.2 [4] Sejam $0 < T \leq \infty$ e $u, v \in C([0, T]; L^N(\mathbb{R}^N)^N)$ duas soluções da equação de Navier-Stokes tempo-fracionária sobre $(0, T) \times \mathbb{R}^N$ com a mesma condição inicial u_0 . Então, $u = v \in [0, T)$.

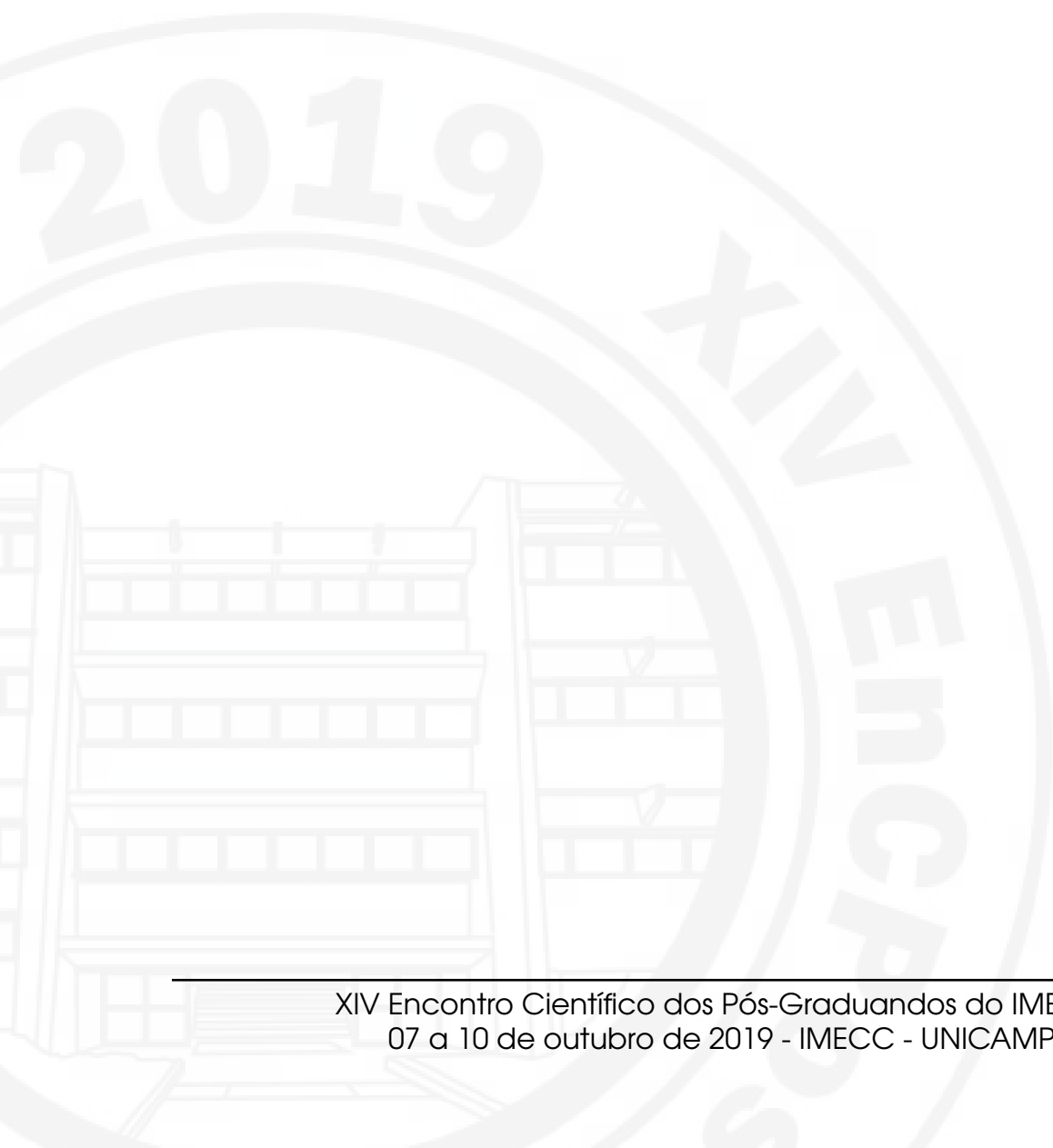
Agradecimentos

(JVCS) agradece pelo apoio financeiro da bolsa PNPd-CAPES (número do processo nº88882.305834/2018-01) do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada IMECC-Unicamp.

Referências Bibliográficas

- [1] P. M. de C. Neto, G. Planas, Mild solutions to the time fractional Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^N , *J. Diff. Equ.*, 259(7) (2015) 2948–2980.
- [2] J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira, A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of ψ -Hilfer operator, *Diff. Equ. & Appl.*, 11(1) (2019), 87–106.
- [3] J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira, On the ψ -Hilfer fractional derivative, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 60 (2018) 72–91.

- [4] J. Vanterler da C. Sousa, S. Gala, E. Capelas de Oliveira, On the uniqueness of mild solutions to the time-fractional Navier-Stokes equations in $L^N(\mathbb{R}^N)^N$, *Submetido à publicação*, (2019).



Piecewise Linear Dynamics with Double Discontinuity

Guilherme Tavares da Silva^{*,1}, Ricardo Miranda Martins^{*,2},

^{*}Departamento de Matemática, IMECC—UNICAMP, CEP 13081–970

The theory of piecewise smooth dynamical systems, in particular, Filippov systems, provides a natural framework for modeling various phenomena in the nature and has had a fast development in the last decades. However, most of the studies in this area are directed to Filippov systems with regular switching manifolds, where the Filippov dynamics is well defined. In this work, we study the double discontinuity, a 3D cross-like singular configuration of the switching manifold, where the Filippov dynamics isn't well defined. More precisely, we propose a framework that, through blow-ups and slow-fast theory, extends Filippov dynamics to this singular configuration (and possibly others). This framework has been applied to the piecewise linear case and allowed its complete dynamical analysis.

Palavras-chave: Dynamical systems, Filippov systems

Referências Bibliográficas

- [1] JEFFREY, M. R. Dynamics at a switching intersection: Hierarchy, isonomy, and multiple sliding. *SIAM J. Applied Dynamical Systems* 13, 3 (Jul 2014), 1082–1105.
- [2] LLIBRE, J., DA SILVA, P. R., AND TEIXEIRA, M. A. Sliding vector fields for non-smooth dynamical systems having intersecting switching manifolds. *Nonlinearity* 28, 2 (Jan 2015), 493–507.

¹ra119509@ime.unicamp.br

²rmiranda@ime.unicamp.br

Peças de um quebra-cabeça para demonstrar teoremas

Marcos H. de P. D. da Silva¹, Samuel Rocha de Oliveira²

¹Instituto de Física Gleb Wataghin, UNICAMP, Campinas, Brasil

²Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, Brasil Este trabalho investiga as estratégias de estudantes de Matemática na demonstração de teoremas a partir da organização de peças formadas por segmentos da demonstração completa.

Palavras-chave: Demonstração de teorema, Quebra-cabeça

Introdução

Demonstrações de teoremas são parecidas com quebra-cabeças. Não há regras sobre como os quebra-cabeças devem ser resolvidos, desde que no produto final todas as peças se encaixem e a imagem final pareça correta. No caso das demonstrações de teoremas, temos infinitas “peças” de infinitos tipos, sem clareza sobre quantas ou quais precisamos encaixar [1].

Os matemáticos, embora utilizem símbolos lógicos e rascunhos ininteligíveis no decorrer da sua descoberta e estratégia de demonstração, escrevem em sua redação final, de costume, uma miscelânea de símbolos matemáticos com a língua comum [2]. Assim, quando pensamos nos modos tradicionais de se aprender a demonstrar teoremas, podemos ter as seguintes atitudes: construir a demonstração usando peças mínimas essenciais da lógica formal, chamadas de “átomos” [3], até nos convertermos de que está completa; ou contemplar e rascunhar em cima de uma demonstração completa até que seja compreendida.

Esta pesquisa visa investigar os casos intermediários a estes dois métodos para aprender a demonstrar, ou seja, a construção da demonstração a partir da organização de uma demonstração decomposta em peças com quantidades pequenas, médias ou grandes da informação total.

Desenvolvimento

Buscamos no caderno de disciplinas da Unicamp [4], conteúdos de disciplinas oferecidas pelo Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) que tratem de algum teorema cuja demonstração seja viável de se trabalhar em aula. Damos prioridade às disciplinas voltadas para alunos dos dois primeiros anos de curso, de modo que ao desenvolvermos um recurso para auxiliar a aprendizagem de uma demonstração de teorema relacionado à esta disciplina, possa ser aplicado de forma a contribuir no rendimento dos alunos na respectiva disciplina.

Elencamos para demonstração a Regra da soma das derivadas, a Regra da multiplicação da derivada por uma constante, um teorema de limites e o Teorema do Confronto. Pois são demonstrações propostas a se trabalhar em Cálculo I, e cuja construção recorre a poucos resultados previamente conhecidos. Exploramos estas demonstrações na sua forma apresentada no livro de James Stewart [5], o qual consta como uma das referências bases deste curso nas ementas da disciplina oferecida. Assim, decomparamos a demonstração como se fossem peças de um quebra-cabeças, variando sua quantidade de informação. Formamos sete subconjuntos com quantidades diferentes de peças de diferentes tipos, sejam homogêneas (todas as peças sempre em um mesmo “tamanho”: pequenas; médias; grandes) ou heterogêneas (peças com tamanhos variados).

Queremos observar o processo de demonstração do teorema com quantidade limitada, mas suficiente de peças, para inferir sobre a relação entre a quantidade de informação na qual a demonstração foi segmentada e seu auxílio para a construção de uma demonstração apropriada.

¹calibum@usp.br

²samuel@ime.unicamp.br

Figure 8.1: Demonstração decomposta pela quantidade de informação nas peças



Considerações Parciais

Dois testes-pilotos foram feitos: no primeiro decomparamos os três teoremas em 7 ou 8 peças de “tamanhos” pequeno e médio; no segundo decomparamos o Teorema do Confronto em 24 peças pequenas. Obtivemos 10 demonstrações da Regra da multiplicação da derivada por uma constante, 5 demonstrações da Regra da soma das derivadas, 2 demonstrações do teorema de limites e 6 demonstrações do Teorema do Confronto. Analisando as demonstrações recebidas no primeiro teste-piloto, percebemos serem muito semelhantes, quando não idênticas à estrutura proposta pelo livro-texto. Contudo, as demonstrações do Teorema do Confronto recebidas, apesar de todas corretas a menos de poucos equívocos, eram distintas daquela do livro-texto. Isto indica que a demonstração construída não foi fruto de memorização da demonstração original e que esta disponibilidade de peças pequenas (de informação), possibilitou a formação de diferentes “imagens corretas” do quebra-cabeça da demonstração do teorema.

Em ambos os testes-pilotos alguns estudantes recorreram ao papel e caneta para auxiliar a construção das ideias, realizando desenhos de gráficos e rascunhos. No segundo teste-piloto, vários estudantes optaram trabalhar em duplas, discutindo sobre a demonstração e organizando as peças por subgrupos de sintaxe (por exemplo: as peças com SE devem vir antes das peças com ENTÃO).

Referências Bibliográficas

- [1] D. J. Velleman. How to prove it: A Structured Approach. Cambridge University Press, New York, 2a. ed. 2006.
- [2] M. Beck; R. Geoghegan. The Art of Proof: Basic Training for Deeper Mathematics. Londres: Springer, 2010.
- [3] M. Ben-Ari. Mathematical Logic for Computer Science. Londres: Springer, 3. ed. 2009.
- [4] dac.unicamp.br/portal/caderno-de-horarios/2019/2/S/G/IMECC acesso em 29 ago. 2019.
- [5] J. Stewart. Cálculo. Vol. 1, 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Métodos MCMC em Campos Aleatórios de Markov e aplicações a dados de imagens

Victor Freguglia¹,
IMECC - UNICAMP

Medidas de probabilidade de Campos Markovianos, usualmente, apresentam constantes de normalização intratáveis e que dependem dos parâmetros devido à presença de dependência. Isso torna a avaliação da verossimilhança impossível e exige métodos alternativos de estimação.

No contexto bayesiano, algoritmos como Metropolis-Hastings exigem a avaliação de (razões de) verossimilhanças na probabilidade de aceitação a cada passo, exigindo alguma aproximação em distribuições intratáveis. Muitos dos métodos desenvolvidos nesse sentido dependem de novas amostras obtidas exatamente, o que não é possível em Campos markovianos. Nesse trabalho é feita uma introdução breve às medidas de Gibbs e suas propriedades e apresentado uma adaptação do algoritmo de Metropolis-Hastings para distribuições duplamente intratáveis. Os resultados serão ilustrados através de modelos de imagens.

Palavras-chave: Inferência bayesiana, seleção de modelos, campos markovianos.

Introdução

Campos markovianos são conjuntos de variáveis aleatórias $\mathbf{Z} = \{Z_i, i \in \mathcal{V}\}$ definidas em algum conjunto de índices \mathcal{V} e que apresentam estrutura de dependência descrita por um sistema de vizinhança \mathcal{N} de forma que

$$P(z_i | \{Z_j, j \in \mathcal{V} \setminus i\}) = P(z_i | \{Z_j, j \in \mathcal{N}_i\}), \quad (0.9)$$

onde \mathcal{N}_i denota o conjunto de vizinhos de i de acordo com \mathcal{N} .

Pelo teorema de Hammersley-Clifford, sob certas condições, 0.9 é satisfeita se e somente se a distribuição conjunta de \mathbf{Z} é dada por uma medida de Gibbs, ou seja,

$$P(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \frac{1}{\zeta} \exp \left(\sum_{q \in \mathcal{Q}} g_q(\mathbf{z}_q) \right), \quad (0.10)$$

onde \mathcal{Q} é o conjunto das cliques (subconjuntos completamente conectados) de \mathcal{N} e $\zeta = \int_{\mathbf{z}} \exp \left(\sum_{q \in \mathcal{Q}} g_q(\mathbf{z}'_q) \right)$.

Feitas algumas suposições sobre as formas das funções g_q e das estruturas de vizinhança \mathcal{N} , é possível parametrizar as famílias de distribuições e caracterizar as probabilidades das configurações em termos de algum vector de estatísticas suficientes $T(\mathbf{z})$. Dessa maneira, para muitos modelos da literatura, 0.10 tem a forma

$$P(\mathbf{Z} = \mathbf{z}) = \frac{1}{\zeta_\theta} \exp(T(\mathbf{z}) \bullet \theta), \quad (0.11)$$

que apresenta constante de normalização intratável que depende dos parâmetros (ζ_θ). Isso impossibilita a avaliação da função de verossimilhança de forma direta e impede que os principais métodos de estimação sejam utilizados.

Desenvolvimento

O problema de estimação no contexto frequentista possui diversas alternativas de solução, como maximização da pseudo-verossimilhança, algoritmos de aproximação estocástica e aproximações da verossimilhança por métodos Monte-Carlo. Observe que amostrar exatamente de Campos Markovianos é impossível em muitos casos, logo, existem duas aproximações sendo feitas: a aproximação da distribuição das amostras ao se usar um número finito de passos de algum algoritmo iterativo para realizá-las e a aproximação da função de verossimilhança por Monte-Carlo utilizando um número finito de amostras, disso a denominação de distribuição de duplamente intratável.

¹victorfreguglia@gmail.com

No contexto Bayesiano, uma das principais ferramentas utilizadas é o algoritmo de Metropolis-Hastings. No entanto, a probabilidade de aceitação de uma transição $\theta \rightarrow \theta'$ depende da razão das verossimilhanças e por tanto da razão

$$\frac{\zeta_{\theta'}}{\zeta_{\theta}}. \quad (0.12)$$

Será apresentado o algoritmo de [?] onde duas cadeias são construídas simultaneamente, uma de reponderação de misturas para aproximar as constantes de normalização e uma segunda com os valores dos parâmetros, bem alguns aspectos práticos de sua implementação. Alguns resultados de simulações serão apresentados dependendo do andamento.

Uma das aplicações de Campos Markovianos é na modelagem de imagens, utilizada nas mais diversas tarefas como segmentação, síntese, etc. A motivação será feita utilizando exemplos de modelos de imagens e mostrado como a abordagem Bayesiana pode ajudar em problemas ainda sem soluções bem estabelecidas, como a estimação da estrutura de interação.

Referências Bibliográficas

SMOOTHING OF NONSMOOTH DIFFERENTIAL SYSTEMS NEAR REGULAR-TANGENTIAL SINGULARITIES AND BOUNDARY LIMIT CYCLE

Douglas D. Novaes¹, Gabriel A. Rondón², IMECC, UNICAMP, Campinas, Brasil

Understanding how tangential singularities evolves under smoothing processes was one of the first problem concerning regularization of Filippov systems. In this work, we are interested in C^n -regularizations of Filippov systems around visible regular-tangential singularities. More specifically, we aim to understand how the trajectories of the regularized system transits through the region of regularization. We apply our results to investigate C^n -regularizations of boundary limit cycles with degenerated contact with the switching manifold.

Introduction

The analysis of differential equations with discontinuous right-hand side dates back to the work of Minorsk [9] in 1962, Andronov et. al [1] in 1976, and Bautin and Leontovich [2] also in 1976. Recently, the interest in such systems has increased significantly, mainly motivated by its wide range of applications in several areas of applied sciences. Piecewise smooth differential systems are used for modeling phenomena presenting abrupt behavior changes such as impact and friction in mechanical systems, refugee and switching feeding preference in biological systems, gap junctions in neural networks, and many others.

In this work we are interested in planar piecewise smooth systems. Formally, Let M be an open subset of \mathbb{R}^2 and let $N \subset M$ be a codimension 1 submanifold of M . Denote by C_i , $i = 1, 2, \dots, k$, the connected components of $M \setminus N$ and let $X_i : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, for $i = 1, 2, \dots, k$, be vector fields defined on M . A piecewise smooth vector field Z on M is defined by

$$Z(p) = X_i(p) \text{ if } p \in C_i, \text{ for } i = 1, 2, \dots, k. \quad (0.13)$$

Since N is a codimension 1 submanifold of M , for each $p \in N$ there exists a neighborhood $D \subset M$ of p and a function $h : D \rightarrow \mathbb{R}$, having 0 as a regular value, such that $\Sigma = N \cap D = h^{-1}(0)$. Moreover, the neighborhood D can be taken sufficiently small in order that $D \setminus \Sigma$ is composed by two disjoint regions Σ^+ and Σ^- such that $X^+ = Z|_{\Sigma^+}$ and $X^- = Z|_{\Sigma^-}$ are smooth vector fields. Accordingly, the piecewise smooth vector field (0.13) may be locally described as follows:

$$Z(p) = (X^+, X^-)_\Sigma = \begin{cases} X^+(p), & \text{if } h(p) > 0, \\ X^-(p), & \text{if } h(p) < 0, \end{cases} \quad \text{for } p \in D. \quad (0.14)$$

An important tool to deal with piecewise smooth systems is the Sotomayor-Teixeira regularization process, introduced in [11]. Roughly speaking, a regularization of a piecewise smooth vector field Z is a one-parameter family Z_ε of continuous vector fields such that Z_ε converges to the discontinuous system when $\varepsilon \rightarrow 0$.

In [12], it was shown that the Sotomayor-Teixeira regularization of Filippov systems gives rise to *Singular Perturbation Problems*, for which the corresponding reduced dynamics is conjugated to the sliding dynamics.

Main Goal

Understanding how tangential singularities evolves under regularization processes was one of the first problem concerning regularization of Filippov systems. Indeed, in the earlier work of Sotomayor and Teixeira [11], it is proved that around a regular-fold singularity of a Filippov system Z , the regularized system Z_ε^Φ possesses no singularities. Recently, based on the discoveries of [12], some works got deeper results by studying the corresponding slow-fast problems.

¹ddnovaes@ime.unicamp.br

²garv202020@gmail.com

In [4] and [3], asymptotic methods [10] were used to study C^n -regularizations of generic regular-fold singularities and fold-fold singularities, respectively. In [8] and [7], the Blow-up method introduced in [5] was adapted to study C^n -regularizations of fold-fold singularities and an analytic regularization of a regular-fold singularity, respectively.

In this work, we are interested in C^n -regularizations of Filippov systems around visible regular-tangential singularities. More specifically, we aim to understand how the trajectories of the regularized system transits through the regions $h(p) \geq \varepsilon$ and $h(p) \leq -\varepsilon$. Accordingly, we characterize two transition maps, namely the *Upper Transition Map* $U_\varepsilon(y)$ and the *Lower Transition Map* $L_\varepsilon(y)$. The results are applied to study C^n -regularizations of boundary limit cycles with degenerated contact with the switching manifold.

Our first two main results characterize the *Upper Transition Map* $U_\varepsilon(y)$ and the *Lower Transition Map* $L_\varepsilon(y)$, respectively. The first main Theorem extends to degenerate regular-tangential singularities the results obtained in [4] for regular-fold singularities. The main difference between our problem and the problem addressed in [4] is that a regular-fold singularity admits a normal form which simplify a lot the study. Here, we have to deal with higher order terms. Finally, the second main Theorem provides condition for the existence of an asymptotic stable limit cycle of the regularized system bifurcating from a boundary limit cycle of a Filippov system with degenerated contact with the switching manifold.

Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Andronov, A. A. Vitt, and S. E. Khaikin. *Theory of oscillators*. Dover Publications, Inc., New York, 1987. Translated from the Russian by F. Immirzi, Reprint of the 1966 translation.
- [2] N. N. Bautin and E. A. Leontovich. *Methods and rules for the qualitative study of dynamical systems on the plane*. Izdat. "Nauka", Moscow, 1976. Spravochnaya Matematicheskaya Biblioteka. [Mathematical Reference Library].
- [3] C. Bonet-Reves, J. Larrosa, and T. M-Seara. Regularization around a generic codimension one fold-fold singularity. *J. Differential Equations*, 265(5):1761–1838, 2018.
- [4] C. Bonet-Revés and T. M-Seara. Regularization of sliding global bifurcations derived from the local fold singularity of Filippov systems. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 36(7):3545–3601, 2016.
- [5] F. Dumortier and R. Roussarie. Canard cycles and center manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 121(577):x+100, 1996. With an appendix by Cheng Zhi Li.
- [6] C. K. R. T. Jones. Geometric singular perturbation theory. In *Dynamical systems (Montecatini Terme, 1994)*, volume 1609 of *Lecture Notes in Math.*, pages 44–118. Springer, Berlin, 1995.
- [7] K. U. Kristiansen. Blowup for flat slow manifolds. *Nonlinearity*, 30(5):2138–2184, 2017.
- [8] K. U. Kristiansen and S. J. Hogan. Regularizations of two-fold bifurcations in planar piecewise smooth systems using blowup. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 14(4):1731–1786, 2015.
- [9] N. Minorsky. *Nonlinear oscillations*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London-New York, 1962.
- [10] E. F. Mishchenko and N. K. Rozov. *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, volume 13 of *Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering*. Plenum Press, New York, 1980. Translated from the Russian by F. M. C. Goodspeed.
- [11] J. Sotomayor and M. A. Teixeira. Regularization of discontinuous vector fields. In *International Conference on Differential Equations (Lisboa, 1995)*, pages 207–223. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.
- [12] M. A. Teixeira and P. R. da Silva. Regularization and singular perturbation techniques for non-smooth systems. *Phys. D*, 241(22):1948–1955, 2012.



9. Pôsteres

Use os links abaixo para navegar nos Pôsteres

- Modelagem da Poluição do desastre de Mariana utilizando o método de Diferenças Finitas
- Gislaíne de Oliveira Queiros
- On eigenvalue-based methods for the trust-region subproblem
- Ismael Navarrete Márquez
- Algumas cotas para gênero de Curvas Maximais
- Stéfani Concolato Vieira
- Uma abordagem de semigrupos numéricos via gênero e multiplicidade
- Gilberto Brito De Almeida Filho
- As cotas de Lieb-Robinson
- Carlos Humberto de Souza Vieira
- On the weak solutions for the Navier-Stokes equations
- Juliane Carolina Baiocchi Dalben
- Aritmética para Números Fuzzy Tipo 2 Intervalar
- Nilmara de Jesus Biscaia Pinto
- Algoritmo polinomial para encontrar 3-PDGDM re-ordens
- Rômulo da Silva Marques

Modelagem da Poluição do desastre de Mariana utilizando o método de Diferenças Finitas

Gislaine O Queiros¹, Cristian CE Morillo², Marina Lima³

^{1,2,3}Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Campinas, SP

O presente estudo visa realizar uma análise descritiva da dispersão de poluentes, com a utilização do método de diferenças finitas. O foco é o ponto de chegada dos rejeitos que partiram da Barragem do Fundão na cidade de Mariana-MG e após percorrem 832km do Rio Doce desembocaram no Oceano Pacífico.

Palavras-chave: Rio Doce, diferenças finitas, Desastre de Mariana, modelagem

Introdução/Objetivos

No dia 5 de novembro de 2015, a cidade de Mariana - MG, foi o cenário principal do maior desastre ambiental da História do Brasil. A barragem de Fundão da mineradora Samarco, se rompeu, provocando o vazamento de 62 milhões de metros cúbicos de lama de rejeitos de minério, que atingiu o Rio Doce, afetando drasticamente o abastecimento de água para a região, resultou na destruição do distrito de Bento Rodrigues e lançou uma onda de lama ao longo do Rio Doce. Diante desse desastre, o objetivo do presente trabalho é propor uma simulação realista para o desastre ambiental ocorrido em Mariana. Neste estudo, utilizamos a equação de difusão-advecção-reação de Fick e sua solução numérica a partir do Método de Diferenças Finitas [2] e o Método de Crank-Nicolson [2] com o a implementação computacional em MatLab[®]. Consideramos também o perfil de Poisselle para o deslocamento do fluido. A simulação numérica de nosso interesse considera os 2 km finais do Rio Doce, quando o mesmo chegou ao mar, como observado na Figura 1.

Mariana_graf.png

Figure 9.1: Foz do Rio Doce com o desemboque da poluição no mar: Imagem do desastre real e curvas de nível da poluição, resultantes da simulação.

Considerações Finais

Este trabalho proporcionou o estudo do processo de dispersão de poluentes [2], usando o Método de Diferenças Finitas e o Método de Crank-Nicolson, com o intuito de verificar o comportamento advectivo presente na equação de difusão-advecção, e, principalmente, de possibilitar a descrição de um fenômeno natural.

Referências Bibliográficas

- [1] Keshet L. E. *Mathematical Models in Biology*. Edited by Siam. Philadelphia. Estados Unidos, 2005.
- [2] Okubo A., Levin E.S. *Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives*. Springer. Princeton, 2000.
- [3] Prestes M.F.B. *Dispersão de material impactante em meio aquático: Modelo Matemático, aproximação numérica e simulação computacional- Lagoa do Taquaral Campinas, SP*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. São Paulo. Brasil, 2011.

¹g155579@dac.unicamp.br

²espitiacristian@gmail.com

³marina@ime.unicamp.br

On eigenvalue-based methods for the trust-region subproblem

Ismael Navarrete Márquez¹, Sandra Augusta Santos²

¹Master in Applied Mathematics, State University of Campinas, Brazil

²Departament of Applied Mathematics, State University of Campinas, Brazil

In mathematics, the term "optimization" is used to refer to problems in which one wants to maximize or minimize a given function. When the problem has no restrictions, it is called an unrestricted optimization problem. There are several strategies to solve this type of problem, and one of them is to create a function model restricted to a certain set, called the trust region, and then solve the associated optimization subproblem. There is a wide variety of methods to solve this subproblem, such as the LSTRS (Large Scale Trust Region Subproblem) and the TRSGEP (Trust Region Subproblem via Generalized Eigenvalue Problem). The two methods have very different philosophies for the resolution of the trust-region subproblem, since the LSTRS is an iterative method that only needs to use matrix-vector products, thus avoiding matrix factorizations, whereas the TRSGEP aims to solve the subproblem using a single generalized eigenvalue problem, avoiding the execution of external iterations. In order to study the performance of both methods, numerical experiments were performed, in which different types of matrices were used to construct the model of the subproblem, so as to suit different situations, and thus analyze the results obtained by the two approaches.

Keywords: Unrestricted optimization, eigenvalues, algorithms, numerical experiments The LSTRS is an iterative

method that only needs to use matrix-vector products, thus avoiding matrix factorizations, to solve the associated optimization subproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & m(x) \\ \text{s.t.} \quad & \|x\| \leq \Delta, \end{aligned} \quad (\text{TRS})$$

where $m(x) = \frac{1}{2}x^T Bx + g^T x$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B = B^T$, $g \in \mathbb{R}^n$ and $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. The optimality condition term $(B - \lambda I)x = -g$ of problem (TRS) is regarded as

$$\begin{pmatrix} g & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \lambda x,$$

which is the second block of the eigenvalue problem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \theta & g^T \\ g & B \end{pmatrix}}_{B_\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} \theta - \lambda &= -g^T x \\ (B - \lambda I)x &= -g. \end{aligned}$$

The goal is to develop a rapidly convergent iteration to adjust θ so that $\theta - \lambda = \phi(\lambda)$, $\phi'(\lambda) = \Delta^2$, where $\phi(\lambda) = -g^T x$, $\phi'(\lambda) = x^T x$, with $(B - \lambda I)x = -g$. The LSTRS computes $\hat{\phi}$, which interpolates ϕ and ϕ' at two points, and determines $\hat{\lambda}$ satisfying $\hat{\phi}'(\hat{\lambda}) = \Delta^2$. It uses $\hat{\lambda}$ and $\hat{\phi}(\hat{\lambda})$ to update θ and computes the next iterates $\{\lambda, x\}$. The LSTRS has safeguards for the sequence in θ and uses information of the second smallest eigenvalue of B_θ , assuming that the vector g is nonzero. If the first component in the eigenvector is small, it considers a so-called near hard case.

The TRSGEP aims to solve the subproblem (TRS) using a single generalized eigenvalue problem of dimension $2n$, avoiding the execution of external iterations. For this purpose, The TRSGEP starts with the case $\lambda^* = 0$ and solves the problem $Bp_0 = -g$ using the Conjugate Gradient (CG) Method, choosing p_0 if $\|p_0\| < \Delta$. Next, if

¹ismaelnm14@gmail.com

²sandra@ime.unicamp.br

$\|p_0\| = \Delta$, it calculates λ^* and y_1, y_2 such that

$$\begin{pmatrix} -I & B \\ B & -\frac{gg^T}{\Delta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\lambda^* \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

If $\|y_1\| \leq \tau$, it performs the HC algorithm based on the CG method to obtain p_1 . Otherwise, $p_1 := -\text{sign}(g^T y_2) \Delta \frac{y_1}{\|y_1\|}$ and p^* is whichever gives the smallest objective value between p_1 or p_0 .

In order to study the performance of both methods, numerical experiments were performed, in which different types of matrices were used to construct the model of the subproblem, so as to suit different situations, and thus analyze the results obtained by the two approaches. We have used (a) the matrix $B = L - 5I$, where L is the standard two-dimensional (2D) discrete Laplacian on the unit square based upon a 5-point stencil with equally spaced mesh points with a shift to make B indenite; (b) matrices of the form $B = UDU^T$ with D diagonal and $U = I - 2uu^T$, $u^T u = 1$; (c) random symmetric sparse matrices generated with the MATLAB's command `sprandsym`. Besides varying the problem dimensions, we have also exploited distinct tolerances for solving the subproblem, as well as different values for the trust-region radius Δ .

Since we have noticed a strong dependence of the methods on the parameters that establish the intrinsic tolerances, we do not have concrete elements to indicate which one is the best. Nevertheless, we have seen that the choice $\Delta = 1$ is out of the pattern of the other radii and we cannot say that by scaling the problem the results will be similar, as affirmed in [1]. Moreover, the option of using the CG method for the hard case made within TRSGEP is not appropriate because the number of matrix-vector products increases too much, slowing down the method. In this sense, the unified iterative process of LSTRS, that addresses the easy, the hard and the near hard cases within the same strategy, has a better performance whenever the (near) hard cases occur.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Adachi, S. Iwata, Y. Nakatsukasa, and A. Takeda, Solving the trust-region subproblem by a generalized eigenvalue problem, *SIAM Journal on Optimization* volume 27(1): 269–291, 2017. DOI: 10.1137/16M1058200.
- [2] I. Navarrete Márquez, On eigenvalue-based methods for the trust-region subproblem, *Master's Thesis IMECC – Unicamp*, 2019. Available at <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/334363>.
- [3] M. Rojas, S. A. Santos and D. C. Sorensen, A new matrix-free algorithm for the large-scale trust-region subproblem, *SIAM Journal on optimization*, volume 11(3): 611–646, 2000. DOI: 10.1137/S105262349928887X.
- [4] M. Rojas, S. A. Santos and D. C. Sorensen, Algorithm 873: LSTRS: MATLAB software for large-scale trust-region subproblems and regularization, *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, volume 34(2): 1–28, 2008. DOI: 10.1145/1326548.1326553.

Algumas cotas para gênero de Curvas Maximais

Stéfani Concolato Vieira¹, Fernando Eduardo Torres²,

^{1 2} Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil Dados $g > 0$ e q uma potência de um primo p , o problema em determinar uma curva de gênero g com a quantidade máxima de pontos sobre um corpo finito, com q^2 elementos, é um problema em aberto. Fixado q , na literatura existem cotas para o gênero de tais curvas, as quais ajudam na determinação de possíveis valores para g . Para $q \leq 7$ este problema já foi resolvido. Apresentamos algumas destas cotas, como por exemplo a cota de Ihara, Furhmann-Torres e Castelnuovo.

Palavras-chave: Curvas Maximais, Corpos Finitos, Gênero.

Introdução

Em Teoria de Códigos, Criptografia ou Geometria Finita é muito interessante o estudo de curvas com “muitos pontos”. Fixado um corpo finito, o problema de determinar a possível existência de uma curva com essa propriedade sobre tal corpo está intrinsecamente relacionado com o invariante gênero. Neste caso, existem cotas para o gênero de uma curva com muitos pontos e conseqüentemente, em certos corpos finitos com cardinalidade pequena podemos explicitar todos os gêneros possíveis apesar que em outros, a resposta ainda está em aberto.

Desenvolvimento

Uma curva neste contexto é uma curva algébrica projetiva não singular, geometricamente irreduzível sobre um corpo finito k com q^2 elementos, onde q é uma potência de um primo p . Devido aos trabalhos dos matemáticos Hasse e Weil, se \mathcal{X} é uma curva de gênero g sobre k e se $\mathcal{X}(k)$ é o conjunto de pontos k -racionais de \mathcal{X} , existe a cota

$$\#\mathcal{X}(k) \leq 1 + q^2 + 2gq,$$

conhecida como Cota de Hasse-Weil. Está cota é ótima, pois conhecemos uma curva que atinge esta quantidade máxima de pontos racionais, a saber a curva Hermitiana \mathcal{H}_q dada por $x^q + x = y^{q+1}$, a qual tem gênero igual a $q(q-1)/2$ sobre k . Aquelas curvas que atingem a Cota de Hasse-Weil são ditas curvas maximais. Desta forma, o problema descrito é determinar o seguinte conjunto

$$M(q^2) = \{g_0 \in \mathbb{N}_0 : \text{existe uma curva } k\text{-maximal de gênero } g_0\},$$

chamado de Espectro dos Gêneros sobre k . Em 1981, usando a Hipótese de Riemann para Corpos Finitos, Ihara mostrou que

$$M(q^2) \subseteq [0, g_1]$$

onde $g_1 := \frac{q(q-1)}{2}$. Já em 1994, Rück e Stichtenoth mostraram que a curva Hermitiana é a única curva k -maximal de gênero g_1 . Podemos explicitar outros gêneros em $M(q^2)$, através da Teoria de Corpos de Funções. Por exemplo, dado $m \mid (q+1)$ a curva definida por $y^q + y = x^m$ é k -maximal com gênero

¹s163561@dac.unicamp.br

²ftorres@ime.unicamp.br

$g = \frac{(m-1)(q-1)}{2}$. Em [2], Fuhmann e Torres mostraram que

$$M(q^2) \subseteq [0, g_2] \cup \{g_1\}$$

onde $g_2 = \frac{(q-1)^2}{4}$. Assumindo alguns fatos de séries lineares sobre curva maximais, também existe uma cota para o gênero usando o a dimensão de Frobenius. Em particular, considerando a série de Frobenius $\mathcal{D} := |(q+1)P_0|$ para um ponto P_0 racional, com r a dimensão de \mathcal{D} e $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^r$ um morfismo relacionado a \mathcal{D} , a Cota do gênero de Castelnuovo aplicada a $\pi(\mathcal{X})$ é

$$g \leq c_0(r, q+1) = \begin{cases} \frac{(2q - (r-1))^2}{8(r-1)}, & \text{se } r \text{ ímpar} \\ \frac{(2q - (r-1))^2 - 1}{8(r-1)}, & \text{se } r \text{ par} \end{cases}$$

Pela Equivalência Fundamental, a saber, $(q+1)P_0 \sim qP + \phi(P)$ com $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ morfismo de Frobenius relativo a k , sabemos que \mathcal{D} não depende da escolha do ponto, $r \geq 2$ e π é um embedding. Em particular [2], $r = 2$ se, e somente se, $g = g_1$. Em [6], Korchmáros e Torres mostraram que

$$M(q^2) \subseteq [0, [c_1(3)]] \cup \{[c_0(3)]\} \cup \{c_0(2)\},$$

onde $c_1(3) := \frac{q^2 - q + 4}{6}$. Em [3], Arakelian, Tafazolian e Torres mostraram que se $g \in M(q^2)$ e

$$\frac{(q-1)(q-2)}{4} := c_0(4) < g \leq c_0(3) := \frac{(q-1)^2}{4}$$

então $r = 3$. Além disso, também mostraram que se $q \not\equiv 0 \pmod{3}$ e $g > \frac{(q-1)(q-2)}{6}$ então $g \geq \frac{(q^2 - 2q + 3)}{6}$. Usando tais resultados para a determinação de $M(7^2)$, faltava apenas o caso $g = 4$ o qual foi mostrado a não existência, por Kudo e Harashita em [4].

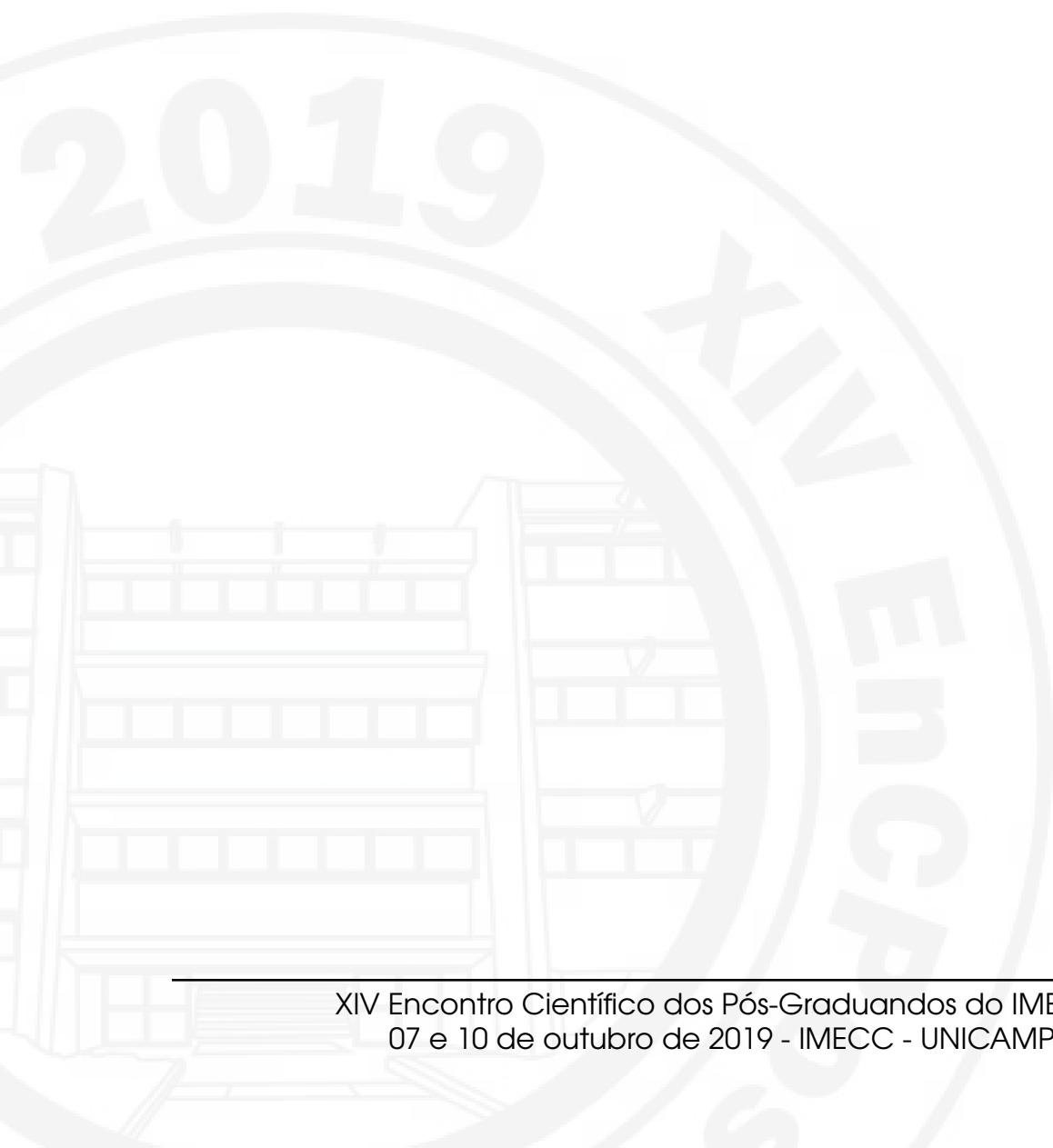
Considerações Finais

Até então foram determinados $M(q^2)$ até $q \leq 7$ e para q pequeno, $8 \leq q \leq 16$ ainda é um problema em aberto. Valores ainda não conhecidos podem ser visto em [3].

Referências Bibliográficas

- [1] K.O. STÖHR, J.F. VOLOCH, *Weierstrass point and curves over finite fields*, Proc. London Math. Soc. (1986), 1-19.
- [2] R. FUHRMANN, F. TORRES, *The genus of curves over finite fields with many rational points*, Manuscripta Math. **89** (1996), 103-106.
- [3] N. ARAKELIAN, S. TAFAZOLIAN, AND F. TORRES, *On the Spectrum for the genera of Maximal Curves over small fields*, Adv. Math. Commun. **12** (2018), 143-49.
- [4] M. KUDO AND S. HARASHITA, *Superspecial curves of genus 4 in small characteristic*, Finite Fields and Their Applications **45**, (2017), 131-169
- [5] H. STICHTENOTH, *Algebraic Function Fields and Codes*, Springer-Verlag, New York, Second Edition, 2009

- [6] G. KORCHMÁROS AND F. TORRES, *On the genus of a Maximal Curve*, Math Ann (2002) 323: 589.



Uma abordagem de semigrupos numéricos via gênero e multiplicidade

Gilberto Brito A. Filho¹, Fernando Eduardo Torres Orihuela²

^{1 2} Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil Para $g \in \mathbb{N}_0$, definimos $S(g)$ a família de semigrupos numéricos de gênero g e $n_g = \#S(g)$. Misteriosamente, n_g se comporta assintoticamente como ϕ^g , onde ϕ é o número de ouro. Isto foi conjecturado por M. Bras-Amorós e foi provado por A. Zhai. Uma outra conjectura feita por ela, que ainda está aberta, é se $n_{g+1} > n_g$, para todo g .

Palavras-chave: Semigrupos numéricos, conjectura, gênero, multiplicidade.

Introdução

Uma abordagem bastante interessante desta conjectura é através da contagem de semigrupos de gênero g por meio de certos invariantes, a saber, a multiplicidade e o gênero. Esta técnica foi introduzida por N. Kaplan e tem permitido estudar tanto o número n_g quanto a conjectura de Wilf. Pensando no estudo deste número, pretendo exibir alguns resultados interessantes que descrevem n_g em determinados casos.

Desenvolvimento

Objetivos

1. Apresentar definições e resultados básicos da teoria de semigrupos numéricos.
2. Exibir a conjectura a cerca de n_g .
3. Exibir o método utilizado para contar semigrupos numéricos através de sua multiplicidade e gênero.
4. Exibir o Resultado principal, Teorema 9.

Definições e notações

- Um subconjunto S de \mathbb{N}_0 é dito um **semigrupo numérico** se S é um submonoide de \mathbb{N}_0 com respeito a soma e se $\mathbb{N}_0 \setminus S$ é finito.
- $\mathbb{N}_0 \setminus S = G(S) = \{l_1 < \dots < l_g\}$ é o conjuntos da **lacunas** de S ;
- $g = g(S) = \#G(S)$ é o **gênero** de S ;
- $F(S) = \max\{G(S)\}$ é chamado **número de Frobenius** de S ;
- $m(S) = \min\{x \in S \mid x \neq 0\}$ é chamado de **multiplicidade** de S .

Resultados na Teoria

¹g211293@dac.unicamp.br

²ftorres@ime.unicamp.br

Conjectura: Para $g \in \mathbb{N}_0$ é verdade que $n_g \leq n_{g+1}$?

Lema 1: Se $S \in \mathcal{S}(g)$, então $G(S) \subset [1, 2g - 1]$. Em particular, $n_g \leq \binom{2g-1}{g}$.

Teorema 2: Sejam S semigrupo numérico de gênero $g > 1$ e multiplicidade m . Então $2 \leq m \leq g + 1$.

Então podemos escrever $n_g = \sum_{m=2}^{g+1} N(g, m)$, onde $N(g, m) = \sharp S(g, m)$. E o problema de descrever n_g passa a ser descrever cada $N(g, m)$.

Teorema 3: Suponha que $2g < 3m$. Então $N(m-1, g-1) + N(m-1, g-2) = N(m, g)$.

Teorema 4: $N(m, g)$ é exatamente o número de composições de $m-1$ números não negativos $\{k_1, \dots, k_{m-1}\}$ tais que $g = \sum k_i$.

Dado g, m naturais, seja $S(g, m) = \{S \in \mathcal{S}(g) \mid m(S) = m\}$. Considere $S \in S(g, m)$ e seu conjunto de Apéry $Ap(S, m) = \{0, w_1, \dots, w_{m-1}\}$, onde $w_i = k_i m + i$.

Teorema 5: $S \in S(g, m)$, então $S = \langle \{m\} \cup Ap(S, m) \rangle$.

Teorema 6: Considere $S \in S(g, m)$ e seu conjunto de Apéry $Ap(S, m) = \{0, w_1, \dots, w_{m-1}\}$. Então o conjunto de geradores minimais de S está contido em $Ap(S, m)$ e é único a menos de reordenação.

Considere o sistema a seguir.

$$(I) := \begin{cases} x_i \geq 1, \\ x_i + x_j \geq x_{i+j}, & \text{se } 1 \leq i, j \leq m-1, i+j \leq m-1 \\ x_i + x_j + 1 \geq x_{i+j-m}, & \text{se } 1 \leq i, j \leq m-1, i+j > m-1 \\ x_i \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Teorema 7: Seja m um inteiro maior que 1 e seja S em $S(g, m)$ com $Ap(S, m) = \{0, w_1, \dots, w_{m-1}\}$ onde $w_i = k_i m + i$. Então (k_1, \dots, k_{m-1}) é solução do sistema (I).

Denotamos por $\mathfrak{S}(m)$ o conjunto de soluções não negativas do sistema (I).

Teorema 8: Seja $m > 1$ inteiro. Para $(a_1, \dots, a_{m-1}) \in \mathfrak{S}(m)$. Então $S = \langle m, a_1 m + 1, \dots, a_{m-1} m + (m-1) \rangle$ é um semigrupo numérico com multiplicidade m e $Ap(S, m) = \{0, a_1 m + 1, \dots, a_{m-1} m + (m-1)\}$. E ainda $g(S) = \sum a_i$.

Teorema 9: Existe uma correspondência 1-1 entre as soluções (k_1, \dots, k_{m-1}) do sistema (I) e conjuntos de Apéry de semigrupos numéricos com multiplicidade m .

Proposição 10: Seja $S \in S(g, 3)$ com $F = F(S)$. Então $Ap(S, 3) = \{0, 3g-F, F+3\}$.

Considerações Finais

O método apresentado permite não só o estudo da conjectura de Bras-Amorós como também a conjectura de Wilf.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Branco, J. García-García, P.A. García-Sánchez, J.C. Rosales, Systems of inequalities and numerical semigroups, J. Lond. Math. Soc. 65 (2) (2002) 611~623.
- [2] N. Kaplan, Counting numerical semigroups by genus and some cases of a question of Wilf, J. Pure Appl. Algebra 216 (2012) 1016 – 1032.
- [3] J.C. Rosales and P. A. García-Sánchez, Numerical semigroups, Springer, 2009.

As cotas de Lieb-Robinson

Carlos Humberto de Souza Vieira¹, Raphael Campos Drumond.²

¹Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas.

²Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais. Lieb e Robinson [1] encontraram em 1972 uma cota para a norma de operadores do comutador da evolução temporal de um operador A com um operador B para sistemas quânticos de muitos corpos com interação de curto alcance. Essa cota pode ser vista como um análogo ao conceito de micro causalidade em teoria relativística de campos.

Palavras-chave: Física-Matemática, Mecânica Quântica de Muitos Corpos, Cotas de Lieb-Robinson.

Introdução

É de conhecimento geral que em um sistema relativístico a informação não pode se propagar mais rápido que a luz. Já em um sistema quântico não relativístico tal limitação não existe. Por exemplo, correlações podem, a princípio, propagar arbitrariamente rápido. Entretanto, em 1972 Lieb e Robinson provaram em [1], para o caso de sistemas quânticos de muitos corpos que possuem interações de curto alcance, que existe uma cota para a influência de perturbações em sistemas distantes. Com essa cota, mostra-se que existe uma velocidade constante máxima para a propagação efetiva de informação. Essa velocidade é chamada de *velocidade de Lieb-Robinson*.

Desenvolvimento

Vamos considerar um sistema quântico de spins definido sobre um conjunto de vértices $\Omega = \mathbb{Z}^d$ equipado com a métrica usual no grafo, que iremos denotar por $d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Associamos a cada ponto $x \in \Omega$ um espaço de Hilbert \mathcal{H}_x de dimensão finita. Dado $\Lambda \subset \Omega$ finito, então o espaço de configurações associado a Λ é dada pelo produto tensorial $\mathcal{H}_\Lambda = \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathcal{H}_x$ e a álgebra de operadores agindo em Λ é dada por $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda) \cong \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathcal{L}(\mathcal{H}_x)$.

Definimos o *suporte* de um operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ não nulo, como o menor subconjunto X de Λ tal que A atua trivialmente em $\Lambda \setminus X$ e não-trivialmente em X . A cada subconjunto finito X de Λ temos associado um operador auto-adjunto $h_X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ com suporte em X , sendo que h_X descreve a energia de interação entre os elementos de X . Chamamos esse operador de *interação local*. A energia devida a todas as interações em Λ é dada pelo *Hamiltoniano local*, onde $H_\Lambda = \sum_{X \subset \Lambda} h_X$. A evolução temporal local de um operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ é dada por

$$A_\Lambda(t) = e^{itH_\Lambda} A e^{-itH_\Lambda}.$$

Sobre hipótese de as interações tenham um alcance máximo R , temos o seguinte teorema. [Cotas de LR] Sejam $X, Y \subset \Lambda$, A, B operadores com suporte em X, Y respectivamente. Então, se $r = d(X, Y) > 0$,

$$\|[A_\Lambda(t), B]\| \leq 2\|A\|\|B\||X|e^{\frac{1}{R}(v_\Phi|t|-r)}, \quad (0.1)$$

¹c261234@dac.unicamp.br

²raphael@mat.ufmg.br

para qualquer $t \in \mathbb{R}$, onde v_Φ é uma constante positiva. A partir das cotas de Lieb-Robinson é possível obter, da seguinte maneira, uma velocidade máxima para a propagação efetiva da informação. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ um operador auto-adjunto com suporte em um subconjunto X de Λ . Seja $\psi_0 \in \mathcal{H}_\Lambda$ o estado inicial do sistema. A aplicação de uma perturbação em um sítio y de Λ , com $d(X, \{y\}) > 0$, pode ser visto como a aplicação de uma unitária $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ com suporte em $\{y\}$ sobre o estado do sistema. Consideraremos as duas seguintes situações:

1. Deixamos o sistema evoluir até um tempo t e fazemos uma medição em X representada pelo operador A . Seu valor esperado é dado então por $\langle A \rangle_{t,1} = \langle \psi_0, A_\Lambda(t) \psi_0 \rangle$.
2. Aplicamos em ψ_0 a transformação unitária U e deixamos o sistema evoluir, a partir daí, até um tempo t . Depois fazemos uma medição em X representada pelo operador A . Seu valor esperado é dado então por $\langle A \rangle_{t,2} = \langle \psi_0, (U^\dagger A_\Lambda(t) U) \psi_0 \rangle$.

Podemos usar a cota de Lieb-Robinson para estimar a interferência da aplicação unitária U na medição de A . Mostra-se que

$$|\langle A \rangle_{t,2} - \langle A \rangle_{t,1}| \leq \| [A_\Lambda(t), U] \| . \quad (0.2)$$

Aplicando então o teorema anterior,

$$|\langle A \rangle_{t,2} - \langle A \rangle_{t,1}| \leq 2 \| A \| \| X \| e^{\frac{1}{R}(v_\Phi t - r)} .$$

Ou seja, para um tempo t fixado, uma perturbação a uma distância maior que $v_\Phi t$ tem uma interferência na medição de A decrescendo exponencialmente. Concluimos, em vista disso, que a velocidade de propagação efetiva de informação é limitada por v_Φ .

Considerações Finais

Vimos que através do teorema de Lieb-Robinson é possível obter uma cota para a interferência de perturbações em sistemas distantes. A partir daí, se obtém um valor máximo para a velocidade efetiva de propagação de informação, v_Φ , denominada de velocidade de Lieb-Robinson. Além de um valor máximo para a velocidade efetiva de propagação de informação, as cotas de Lieb-Robinson possuem diversas outras aplicações, uma das mais importantes é o teorema do decaimento exponencial de correlações, provado por Hastings em . Tal teorema nos diz que um gap espectral acima do estado fundamental implica no decaimento exponencial de correlações no estado fundamental.

Referências Bibliográficas

- [1] Lieb, Elliott H. and Robinson, Derek W., The finite group velocity of quantum spin systems. *Comm. Math. Phys.*, 1972. DOI: 10.1007/BF01645779.
- [2] Hastings, M. B., Locality in Quantum and Markov Dynamics on Lattices and Networks, *Phys. Rev. Lett.*, 2004. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.140402.

On the weak solutions for the Navier-Stokes equations

Juliane Carolina Baiocchi Dalben¹, Anne Caroline Bronzi²

¹Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil

²Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil In this work we will discuss the mathematical theory of the incompressible Navier-Stokes equations and some of the classical methods from the theory of partial differential equations such as the Galerkin method. For this, we will need to state the weak formulation of the Navier-Stokes equations and the spectral decomposition of the Stokes operator. Furthermore we will show that such weak solution obtained by the Galerkin method satisfies the strong energy inequality.

Keywords: weak solution, Galerkin method, strong energy inequality

Introduction

In this research in Fluid Dynamics, we performed a study of the incompressible Navier-Stokes equations, that is one of the central themes of modern analysis with applications in several areas of mathematics and physics, since they describe the dynamics of viscous fluids. Here we show the weak formulation to those equations and later we will guarantee the existence of weak solution for the incompressible Navier-Stokes equations.

Results and Discussion

We define the spaces $H^3 = \left\{ u \in \dot{L}^2 : u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \hat{u}_k e^{ik \cdot x}, \hat{u}_{-k} = \overline{\hat{u}_k} \text{ and } k \cdot \hat{u}_k = 0 \forall k \in \mathbb{Z}^3 \right\}$ and $G^3 = \left\{ u \in \dot{L}^2 : u = \nabla g, g \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \right\}$. The Helmholtz–Weyl decomposition on \mathbb{R}^3 says that the space $\dot{L}^2(\mathbb{R}^3)$ can be written as $\dot{L}^2(\mathbb{R}^3) = H^3 \oplus G^3$. The Leray projector is given by $\mathbb{P}u = v$ if and only if $u = v + \nabla w$, where $v \in H^3$ and $\nabla w \in G^3$.

For Ω an open bounded domain in \mathbb{R}^3 with Lipschitz boundary, we define $H(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u = 0 \text{ in } \Omega \text{ and } u \cdot \vec{n} = 0 \text{ in } \Omega\}$ and $G(\Omega) = \{w \in L^2(\Omega) : w = \nabla g, g \in H^1(\Omega)\}$. The Helmholtz–Weyl decomposition on Ω says that $L^2(\Omega) = H(\Omega) \oplus G(\Omega)$. The Leray projector is defined by $u = h \iff u = h + \nabla g$, where $h \in H(\Omega)$ and $\nabla g \in G(\Omega)$.

The Stokes operator A is defined by $Au = -\Delta u$, with its domain given by $\mathcal{D}(A) = V(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, where $V(\Omega) = H(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ if Ω is a smooth bounded domain in \mathbb{R}^3 or $V(\Omega) = H(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ if Ω is the torus \mathbb{T}^3 .

Let Ω be a smooth bounded domain in \mathbb{R}^3 or the torus \mathbb{T}^3 .

[Spectral Decomposition of the Stokes Operator] There exists a family of functions $= \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ such that

- (i) is an orthonormal basis in $H(\Omega)$;
- (ii) $a_j \in (A) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$ are eigenfunctions of A , that is, $Aa_j = \lambda_j a_j, \forall j \in \mathbb{N}$, with $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ and $\lambda_j \rightarrow +\infty$;
- (iii) is an orthogonal basis in $V(\Omega)$.

¹jubaiochi@gmail.com

²annebronzi@ime.unicamp.br

We say that u is a weak solution of the Navier-Stokes equations satisfying the initial condition $u_0 \in H$ if $u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, for all time $T > 0$, and u satisfies the equation

$$\int_0^\infty -u_t \varphi + \int_0^\infty \nabla u \nabla \varphi + \int_0^\infty (u \cdot \nabla) u \varphi = u_0 \varphi(0)$$

for all $\varphi \in \tilde{\sigma}$, where the space $\tilde{\sigma}(\Omega) = \{ \varphi : \varphi = \sum_{k=1}^N \alpha_k(t) a_k(x), \alpha_k \in C_c^1([0, \infty)), a_k \in \text{and } N \in \}$, where is the basis of $H(\Omega)$ consisting of the eigenfunctions of the Stokes operator given in the theorem 9.

The Galerkin equation of order n corresponding to the Navier–Stokes equations is given by

$$(G) \begin{cases} {}_t u_n + A u_n + P_n[(u_n \cdot \nabla) u_n] = 0 & (1) \\ u_n(0) = P_n u_0 & (2) \end{cases},$$

where $P_n : L^2 \rightarrow H$ denotes the projection operator $P_n u = \sum_{i=1}^n u a_i a_i$, where $a_i \in \text{and } P_n H$ is the finite-dimensional space spanned by the first n eigenfunctions of the Stokes operator. We call the u_n 's the Galerkin approximations. We can interpret the Galerkin equation as the projection in $P_n H$ of the Navier-Stokes equations.

[Hopf] For every $u_0 \in H(\Omega)$, there exists at least one global-in-time weak solution of the Navier–Stokes equations satisfying the initial condition u_0 .

[Ladyzhenskaya] The weak solution u of the Navier-Stokes equations constructed in theorem 9 satisfies the strong energy inequality: $\frac{1}{2} \|u(t)\|^2 + \int_s^t \|\nabla u\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u(s)\|^2, \forall t > s$ for almost every $s \in [0, \infty)$, including $s = 0$. In particular, for $s = 0$, u satisfies $\frac{1}{2} \|u(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u(0)\|^2, \forall t > 0$, that is known as the energy inequality.

Referências Bibliográficas

- [1] Robinson, James C. and Rodrigo, José L. and Witold Sadowski. *The Three-Dimensional Navier–Stokes Equations: Classical Theory* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2016.
- [2] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.

Aritmética para Números Fuzzy Tipo 2 Intervalar

Nilmara J. B. Pinto¹, Vinícius F. Wasques², Estevão Esmi Laureano³, Laécio C. Barros⁴

^{1,2,3,4}Departamento de Matemática Aplicada, IMECC - UNICAMP

Dada a instrínseca noção de incerteza característica dos conjuntos fuzzy, consideram-se conjuntos fuzzy tipo 2, cuja função de pertinência também possui incerteza. Seguindo os moldes do que se faz para número fuzzy, defini-se aqui distribuição de possibilidade conjunta para números fuzzy tipo-2 e, utilizando-a no princípio de extensão de sup- J , constrói-se uma aritmética.

Palavras-chave: Números fuzzy tipo 2, Aritmética fuzzy.

Introdução

A Teoria de Conjuntos Fuzzy (TCF) visa tratar matematicamente imprecisões, incertezas e subjetividades comuns a vida e julgamento humano. Ao definir um conjunto fuzzy segundo sua função de pertinência pode-se, no entanto, incorrer em inconsistência, pois tal caráter impreciso deveria ser refletido na função de pertinência do conjunto [2].

A fim de abarcar amplamente a imprecisão em um conjunto fuzzy, foram introduzidos por Zadeh (1975) [4] conjuntos fuzzy que consideram incerteza sobre sua definição, chamados de conjuntos fuzzy tipo 2 (CFT2). Aqueles CFT2 que modelam imprecisão sobre números reais são chamados de números fuzzy tipo 2 (NFT2). E, embora hajam diversas aplicações desse ramo da TCF [1], ainda não foi desenvolvida uma aritmética para tais números.

Segundo Wasques [3], aritméticas da TFC são classificadas entre interativas e não interativas. Ambas são obtidas através de distribuições de possibilidades conjuntas, combinadas com o princípio de extensão sup- J . O objetivo desse trabalho é, portanto, definir distribuição de possibilidade conjunta entre NFT2 na intenção de usá-la para estabelecer uma aritmética para NFT2.

Desenvolvimento

Um conjunto A fuzzy tipo 2 sobre o conjunto universo X é caracterizado por, além de ter a função de pertinência $\mu_A(x) \in [0, 1]$, ter incerteza $\varphi_A(x, \beta)$ sobre essa função, com $\beta \in [0, 1]$. Ou seja, ele pode ser completamente caracterizado pela função $\varphi : X \rightarrow X \times [0, 1] \times [0, 1]$, ou ainda, a tripla $\varphi_A(x, \beta) = (x, \beta, \mu_A^\beta(x))$, em que β representa a incerteza sobre a pertinência $\mu_A(x)$. Quando $\varphi_A(x, \beta) = 1, \forall (x, \beta) \in X \in [0, 1]$, diz-se que A é um número fuzzy tipo 2 intervalar (NFT2I). Denomina-se mancha de incerteza (MDI) o conjunto de todas as funções de pertinência descrito por

$$MDI(A) = \{(x, \beta) \in X \times [0, 1]; \varphi(x, \beta) > 0\}.$$

Originalmente uma distribuição de possibilidade conjunta (DPC) entre n números fuzzy A_1, \dots, A_n é um número fuzzy com universo em \mathbb{R}^n tal que sua projeção em cada direção i retorna o conjunto fuzzy

¹nilmarabiscaia@gmail.com

²viniwasques@hotmail.com

³eelaureano@gmail.com

⁴laeciocb@ime.unicamp.br

A_i . Dessa forma, a DPC entre dois NFT2I, aqui chamada de distribuição de possibilidade conjunta tipo 2 (DPCT2) é um NFT2I que satisfaz, para cada $\beta \in [0, 1]$ e para cada $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$(A_i(y), \beta) = \bigvee_{x \in \mathbb{R}^n : x_i = y} (J(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n), \beta).$$

Um exemplo simples para números fuzzy tipo 1 é aquele em que A_1 e A_2 são linearmente interativos. Dessa forma a DPC é dada através da reta $\{qx + r; x \in A_1\}$ para $q \neq 0$. Para NFT2I consideraremos $(J_{\{q,r\}}, \beta)$, para cada $\beta \in [0, 1]$, sendo $q = q(\beta)$ e $r = r(\beta)$, resultando em uma coleção de DPC parametrizadas por β .

Nota-se que para cada $\beta \neq 1$ há pelo menos duas DPC, e a projeção de cada uma delas na direção i retorna o i -ésimo número fuzzy A_i com a respectiva pertinência β .

O princípio de extensão de Zadeh permite levar funções $f : X \rightarrow Y$ para o contexto fuzzy, descrevendo $f(A)$ para A um conjunto fuzzy qualquer. Aqui se considera o princípio de extensão sup- J para o caso em que DPC é do tipo 2. Para A_1, \dots, A_n NFT2I e J a DPCT2 que os relaciona, a extensão sup- J de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, denotada por $(f_J(A_1, \dots, A_n), \beta)$, é, para cada $\beta \in [0, 1]$, dada por

$$(f_J(A_1, \dots, A_n), \beta)(y) = \bigvee_{(x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} (J(x_1, \dots, x_n), \beta),$$

em que $f^{-1}(y) = \{(x_1, \dots, x_n); f(x_1, \dots, x_n) = y\}$ e $\bigvee \emptyset = 0$.

A aritmética é então construída para o caso em que a função estendida é $f \in \{+, -, \cdot, \div\}$.

Considerações Finais

A fim de lidar com a incerteza da função de pertinência de um conjunto fuzzy tipo 2, usou-se a estratégia de parametrizar tal incerteza. Tal procedimento permitiu definir distribuição de possibilidade conjunta tipo 2 e, através do princípio de extensão sup- J , estabelecer uma aritmética para números fuzzy tipo 2. Pretende-se ainda representar tais operações segundo conjuntos de nível [2] e perceber como se dá a dispersão da incerteza através de tais operações aritméticas.

Referências Bibliográficas

- [1] R. John and S. Coupland, Type-2 fuzzy logic: A historical view, *IEEE Computational Intelligence Magazine*, volume 2, número 1, p. 57–62, 2007. DOI: 10.1109/MCI.2007.357194.
- [2] J. Mendel, Type-2 fuzzy sets: Some questions and answers, *IEEE Connections, Newsletter of the IEEE Neural Networks Society*, volume 1, p. 10–13, 2003.
- [3] V. F. Wasques. *Fuzzy Differential Equations via Interactive Arithmetic: Applications in Biomathematics*. Tese de doutorado, Campinas, 2019.
- [4] L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning, *Information Sciences*, volume 8, p. 199–249, 1975.

Algoritmo polinomial para encontrar 3-PDGDM re-ordens

Rômulo da Silva Marques¹, Carlile Lavor²

¹Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil

²Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil. Seja $G = (V, A)$ um grafo simples não direcionado e K um inteiro. Uma K -PDGDM re-ordem de G é uma função sobrejetiva $r : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow V$, $m \in \mathbb{N}$, tal que os K primeiros elementos de r formam uma K -clique de G , cada elemento r_j está conectado com os $K - 1$ elementos imediatamente anteriores e para cada elemento r_j , o K -ésimo elemento imediatamente anterior à r_j ou está conectado à r_j ou é igual à r_j . Desenvolvemos um algoritmo capaz de extrair uma re-ordem de G . Implementamos este algoritmo na plataforma *Mathematica*, da *Wolfram*. Testamos tal algoritmo em instâncias do 3-PDGDM.

Palavras-chave: Re-ordem, PDG, PDGDM.

Introdução

O Problema de Geometria de Distâncias (PGD) é um problema inverso que consiste em: dados um grafo $G = (V, A)$ simples e não direcionado, uma função não-negativa $d : A \rightarrow \mathbb{R}$, a qual chamamos de *distância*, e um inteiro K , posicionar no \mathbb{R}^K cada vértice de V de maneira que as distâncias euclidianas entre suas posições coincidam com os valores de d . Estamos interessados na subclasse deste problema cujo $K = 3$, no contexto de modelagem da estrutura 3D de proteínas. Diversas abordagens para resolução do 3-PGD baseiam-se na aplicação de métodos contínuos. Porém, se uma ordenação apropriada dos vértices for estabelecida *à priori*, o espaço de solução do problema torna-se discreto. Tal ordenação pode ser representada como uma função do tipo $r : \{1, 2, \dots, |V|\} \rightarrow V$. Daí, define-se o Problema Discretizável de Geometria de Distâncias Moleculares (PDGDM, ou K-PDGDM, cujo K é o inteiro de entrada do PGD): um PGD imbuído de uma *ordem* de características particulares (detalhes em [1]). Este problema pode ser resolvido pelo algoritmo exato *Branch-And-Prune* (BP), que faz uso de propriedades do grafo oriundas da *ordem* dos vértices ([4]). No entanto, encontrar uma ordem para o 3-PDGDM é um problema NP-completo ([2]). Surge então a *re-ordem*, uma ordenação que permite repetição de vértices, mas que, além de poder ser empregada pelo BP, pode ser obtida em tempo polinomial ([3, 1]).

Desenvolvimento

Seja $G = (V, A)$ um grafo simples não direcionado. Uma K -PDGDM re-ordem de G é uma função sobrejetiva $r : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow V$, $m \in \mathbb{N}$, (para simplificar a notação, escrevemos r_i em vez de $r(i)$) que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\{r_1, r_2, \dots, r_K\}$ é uma K -clique de G ;
2. $\forall i = K + 1, K + 2, \dots, m, \{r_{i-K+1}, r_i\}, \{r_{i-K+2}, r_i\}, \dots, \{r_{i-1}, r_i\} \in A$;
3. $\forall i = K + 1, K + 2, \dots, m, \{r_{i-K}, r_i\} \in A$ ou $r_i = r_{i-K}$.

Ainda considerando $G = (V, A)$, define-se o grafo $G_K = (V_K, E_K)$ como:

1. $\forall \delta \in V_K, \delta$ é conjunto definido pelos vértices de uma K -clique de G ;

¹romulo.s.marques@gmail.com

²clavor@ime.unicamp.br

2. $\forall \{\delta, \gamma\} \in E_K$, $\delta \cup \gamma$ é conjunto cujos elementos formam uma $(K+1)$ -clique de G .

Fazendo uso dos dois objetos definidos acima, [3] mostra que existe *re-ordem* em G se, e somente se, existe componente conexa em G_K cuja união dos elementos de V_k resulta em V . Ademais, caso tal *re-ordem* exista, esta pode ser encontrada em tempo polinomial ($O(|V|^{K+1} K^2 \max\{K^2, \log(|V|^{K+1} K)\})$).

Uma vez que a proposta do nosso trabalho é construir ferramental matemático-computacional para encontrar a conformação tridimensional de proteínas, desenvolvemos algoritmo que extrai *uma 3-PDGDM re-ordem*, caso exista, de um grafo $G = (V, A)$ de entrada. Implementamos nosso método na plataforma *Mathematica*, da *Wolfram*. Em testes preliminares, nosso algoritmo encontrou uma *re-ordem* para cada instância do *3-PDGDM* utilizada, indiciando a validade dos teoremas apresentados em [3].

Considerações Finais

Diante das dificuldades para se encontrar uma *3-PDGDM ordem* (*NP-completo*), [2] apresenta uma *re-ordem* artesanal para ser usada junto ao BP. Atualmente, estamos construindo uma versão do BP, no *Mathematica*, que emprega *re-ordens*. Em seguida, compararemos as aplicações deste BP com a *re-ordem* artesanal e com a *re-ordem* obtida por nosso algoritmo. Dois parâmetros de comparação a serem estudados serão o erro da solução obtida e o tempo de execução do BP. Em paralelo, traduziremos todas as implementações feitas para a linguagem *c++*, a fim de comparar nossos resultados com os da literatura.

Referências Bibliográficas

- [1] C.Lavor. *Rigidez em grafos de proteínas*. 32° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2019, ISBN: 978-85-244-0428-3.
- [2] C. Lavor, L. Liberti, B. Donald, B. Worley, B. Bardiaux, T. E. Malliavin, and M. Nilges. Minimal NMR distance information for rigidity of protein graphs. *Discrete Applied Mathematics*, volume 256, pg 91-104, 2019, DOI: 10.1016/j.dam.2018.03.071.
- [3] C. Lavor, M. Souza, L. M. Carvalho, and L. Liberti. On the polynomiality of finding KDMDGP re-orders. *Discrete Applied Mathematics*, volume 267, 2019, pg 190-194, DOI: 10.1016/j.dam.2019.07.021.
- [4] L. Liberti, C. Lavor, and N. Maculan. A branch-and-prune algorithm for the molecular distance geometry problem, *International Transactions in Operational Research*, 15, 2008, pg 1-17.

