Geometrias sob a Axiomática de Hilbert

Ana Cláudia da Silva Moreira

Introdução

Este trabalho foi elaborado pela aluna Ana Cláudia da Silva Moreira, a pedido da Profa. Eliane Quelho Frota Rezende, como encerramento da disciplina Geometria Descritiva e Desenho Geométrico (MA 241), oferecida no segundo semestre de 2006, obrigatória nos cursos de Matemática (Bacharelado e Licenciatura) da Universidade Estadual de Campinas.

O objetivo geral do trabalho é mostrar aos colegas, estudantes do curso, a existência de outras Geometrias e seus sistemas axiomáticos, baseados no de Hilbert. Partindo da Axiomática de Hilbert para a Geometria Euclidiana, estudada na ementa da disciplina citada, procuramos estudar a construção de modelos que dessem forma à outras Geometrias, mostrando quais grupos axiomáticos de Hilbert continuam válidos e quais são suprimidos ou alterados. Estudamos Geometrias Euclidiana, Esférica, Projetiva e Afim.

O trabalho não é aprofundado e para compreendê-lo bastam conhecimentos básicos de Geometria Analítica e Álgebra Linear. É desejável que se tenha algum conhecimento de classes de equivalência e conjuntos quocientes para que se tenha uma melhor compreensão da construção do modelo para a Geometria Projetiva.

O trabalho traz também breves relatos históricos que julgamos curioso e estimulante acrescentar.

Agradecemos o apoio do Prof. Carlos Eduardo Durán Fernandez que tão atenciosamente nos indicou e cedeu fontes bibliográficas fundamentais para a pesquisa e estudo aqui apresentados.

Ana Cláudia da Silva Moreira
Campinas, 03 de novembro de 2006.

Índice

Capítulo 1

Aspectos Históricos

1.1 Geometria Clássica

A palavra *Geometria* tem etimologia grega e significa “medição de terras” Na Antiga Mesopotâmia e no Antigo Egito, o conhecimento geométrico resumia-se a um aglomerado de procedimentos práticos de mensuração aplicados, principalmente na agricultura. Eram cálculos empíricos de comprimentos, áreas e volumes com o emprego de fórmulas, muitas delas erroneamente utilizadas.

Devemos aos gregos a transformação da Geometria de um conhecimento rudimentar e prático num dos ramos da Matemática Pura. Eles tiveram a iniciativa de abstrair as idéias do contexto físico para o contexto puramente mental, processo que levou séculos para ser completado, aproximadamente de 600 a.C. até 300 a.C..

O mais antigo grego conhecido que adotou tal postura foi o mercador e engenheiro Tales de Mileto ($\pm$ 600 a.C. a $\pm$ 547 a.C.), considerado o primeiro filósofo, cientísta e matemático grego. Ele empregou argumentos lógicos para demonstrar proposições básicas de Geometria, muitas delas de sua autoria, que não tinham importância alguma na medição de terras. Tales foi a origem de uma escola que perdurou por um século e supõe-se que ele tenha aprendido em suas viagens os rudimentos de Geometria com os povos da Mesopotâmia e Egito. É creditado a ele a demonstração de resultados tais como:

- *um círculo é bissectado por um diâmetro*;
- *os ângulos da base de um triângulo isóceles são iguais*;
- *um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto*;

- *os ângulos opostos pelo vértice são iguais.*

Pitágoras de Samos ($\pm$ 569 a.C. a $\pm$ 475 a.C.), possivelmente um aluno da escola de Tales, estabeleceu uma sociedade filosófica e religiosa que muito contribuiu para a formalização da Geometria, com trabalhos nas Teorias de paralelas, figuras similares e com uma combinação de Teoria de números e misticismo. O próprio Pitágoras introduziu as palavras Filosofia (amor à Sabedoria) e Matemática (o que é aprendido). Após a morte do filósofo, a Escola Pitagórica dividiu-se em duas facções. Uma, formada por aqueles que aceitavam a palavra do "mestre" como uma revelação e a outra, formada por aqueles seguidores que desejavam "o novo aprendizado", os matemáticos.

Membros da última facção desenvolveram novos resultados de matemática exclusivamente por dedução lógica, transformando-a numa Ciência Dedutiva. Sua doutrina sobreviveu por séculos. Ainda na década de 1980 existiam seguidores místicos em Fortaleza, Ceará, que realizavam suas reuniões num velho casarão do centro da cidade, na Rua Major Facundo, cuja sede era chamada de Escola Pitagórica.

O avanço seguinte foi estabelecido por outro grego, um professor de Geometria, Hipcrates de Chios ($\pm$ 470 a.C. a $\pm$ 410 a.C.), ao escrever um livro texto, *Elementos de Geometria*, no qual os teoremas eram arranjados numa sequência onde os subsequentes eram provados tendo como base os teoremas anteriores. Tudo indica que sua obra está contida nos Livros I e II dos Elementos de Euclides. Com ele tem-se início a sistematização do conhecimento Matemático, estabelecendo uma estrutura de apresentação que sobrevive até hoje. Hipócrates de Chios contribuiu com teoremas sobre circunferências.

Por essa mesma época, foi fundada em Atenas, pelo filósofo Platão ($\pm$427 a.C. a $\pm$ 347 a.C.), a famosa *Academia*, uma instituição que congregava os maiores sábios da época. Sobre seu portão estava escrito:

Não permitam a entrada de quem não saiba geometria.

Com a Academia, a Matemática obteve o status de Ciência Pura, seus membros não tinham a preocupação em aplicar os conhecimentos adquiridos no seu trabalho e a ênfase era no desenvolvimento do pensamento matemático e filosófico.

Um dos membros da Academia, dos 17 aos 30 anos, foi o filósofo Aristóteles da Macedônia ($\pm$ 384 a.C. a $\pm$ 322 a.C.). Aristóteles descendia de uma abastada família da Macedônia. Seu pai fôra médico do avô de Alexandre, o grande. Estudou na Academia de Platão e ali ficou até a morte do fundador ($\pm$ 347 a.C.), quando emigrou para a Ásia Menor, indo desposar Pítia, a filha de um pequeno tirano da região. Com a invasão e conquista da região pelos persas, emigrou para a ilha de Lesbos onde sua esposa morreu ao dar a luz a uma filha.

A contribuição de Aristóteles para os fundamentos da Matemática foi indireta, construiu uma teoria de afirmações que começava com noções comuns, noções especiais, definições e um tratado sobre lógica em Filosofia, estabelecendo a base para toda a Matemática grega.

Em 343 a.C., o pai de Alexandre, chamou-o para educar o filho, fato que criou uma grande afeição entre o filósofo e o futuro conquistador. Após ser (um excelente) governador de uma região da Macedônia, voltou à Atenas onde fundou um famoso centro científico e filosófico chamado *Liceu*.

O Liceu foi a primeira Universidade, com o significado atual do termo. Ao contrário da Academia, instituição destinada aos aristocratas, Aristóteles requisitava seus alunos da classe média. E a diferença continuava no método de ensino. Seus alunos eram dirigidos para o estudo de Ciências onde classificavam plantas, animais e seus hábitos, estudavam Epistemologia, Filosofia, Anatomia, etc.. O Liceu tinha biblioteca, jardim zoológico e museu natural, mantidos com a ajuda financeira de Alexandre e exemplares trazidos pelos pescadores, exploradores e caçadores a seu pedido.

Aristóteles foi cientista, professor e filósofo. Suas aulas matutinas eram ministradas caminhando com seus alunos pelos pórticos que circundavam o Liceu, escola construída no meio dos Jardins de Lício. Por isso sua escola é apelidada de peripatética (ambulante). Pelas tardes abria-se a Universidade para a população, onde eram proferidas conferências sobre diversos assuntos. Embora não fosse matemático, deixou registrada uma demonstração mostrando que $\sqrt{2}$ não era comensurável. Seu rigor científico, levou-o a uma filosofia na qual os termos empregados eram precisamente definidos. Prestes a morrer, pediu para ser sepultado ao lado da esposa, na ilha de Lesbos.

Nos seiscentos anos seguintes à criação do Liceu foram criadas centenas de Escolas pela região grega, mas nenhuma delas comparável em importância a ele ou a Academia, exceto o *Museu de Alexandria.*

Outro membro da Academia, Eudoxos de Cnido ($\pm$ 408 a.C. a $\pm$ 355 a.C.), fez a moldura de como deve ser uma teoria Matemática, sistematizando formalmente o método axiomático inspirado no trabalho de Aristóteles. Sua mais notável contribuição foi compreender as quantidades incomensuráveis que tanto perturbou os pitagóricos. Aceita-se que seu trabalho em Matemática é a base dos Livros V, VI e XII dos *Elementos* de Euclides. A Academia foi um centro no qual vários de seus membros se destacaram na história da Matemática e, em particular, na Geometria:

- *Teodoro de Cirene (± 465 a.C. a ± 398 a.C.)*;
- *Teaetetus (± 417 a.C. a ± 369 a.C.)*;
- *Meneacmus (± 380 a.C. a ± 320 a.C)*;
- *Dinostrato (± 390 a.C. a ± 320 a.C.), irmão de Meneacmus*;
- *Autólicos de Pitane (± 360 a.C. a ± 290 a.C.)*

Com a morte de Alexandre da Macedônia, o Grande, (356 a.C. a 323 a.C.) aluno de Aristóteles e Meneacmus, o território conquistado foi dividido entre seus generais. Alexandria, cidade fundada por ele, ficou no território governado por Ptolomeu I, terras correspondentes ao atual Egito. Este general criou o Museu de Alexandria e o transformou numa Universidade insuperável em seu tempo, em termos de conhecimento. Para dar uma grandeza da importância do centro, notícias da época falam numa biblioteca de 500 mil volumes. Muitos dos intelectuais mudaram-se para ali, entre eles Euclides.

1.2 Os Elementos de Euclides

Toda esta construção da mente humana, feita ao longo de 300 anos, ficou registrada numa obra momumental intitulada *Elementos*, constituída de 13 livros (capítulos). Nela estão demonstradas 465 proposições deduzidas de um sistema axiomático numa forma didática, cujo único rival em número de traduções é a Bíblia. Tal obra expõe sistematicamente toda a Matemática básica conhecida em seu tempo.

Devemos tal façanha ao matemático grego Euclides (± 330 a.C. a ± 270 a.C.) cuja biografia é praticamente desconhecida. Provavelmente estudou na Academia e mudou-se para Alexandria a convite de Ptolomeu I para ser o primeiro professor de Matemática do Museu. Escreveu cerca de doze obras mas somente cinco delas resistiram ao tempo. Seu texto intitulado *Óptica* (Stoichia) foi um dos primeiros trabalhos escritos sobre perspectiva. A obra de Euclides não é apenas uma simples compilação de resultados conhecidos; supõe-se que várias proposições e provas são do próprio Euclides e, possivelmente, algumas delas foram acrescentadas posteriormente. A obra não trata apenas de Geometria, inclui também resultados de Aritmética. No Livro IX ficou para a posteridade uma das mais belas e elegantes provas da

Matemática, a prova do teorema: *Existem infinitos números primos.* Certamente um autor de uma obra como os Elementos deveria ser uma matemático de primeira linha. A lenda descreve-o como um professor excepcional, sendo caricaturado na figura de um velhinho bondoso. Sua proposta didática para o ensino da Matemática foi espetacular. Ainda hoje, 2300 anos depois, é integralmente adotada nas Escolas de todo o mundo.

A Escola de Alexandria sobreviveu até 450 d.C. e muito contribuiu com o desenvolvimento da Geometria pós-Euclides, sendo seu maior expoente o ex-aluno siciliano Arquimedes de Siracusa (287 a.C. a 212 a.C.) considerado um dos três maiores matemáticos de todos os tempos, junto com o inglês Isaac Newton (1643 a 1727) e o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777 a 1855). Seu método para cálculo de áreas guarda muita semelhança com o Cálculo Integral utilizado nos dias atuais.

Outros notáveis do Museu foram o ex-aluno Apolonius de Perga (262 a.C. a 190 a.C.), com o estudo das cônicas, e um professor do Museu, Papus de Alexandria (290 d.C. a 350 d.C.) que ampliou o trabalho de Euclides, com resultados cujo espírito era totalmente diferente do que foi feito até então, demonstrando teoremas novos que diziam respeito apenas aos axiomas de incidência. Papus foi o último grande geômetra grego e seu trabalho é tido como a base da Geometria Projetiva.

A morte de Hipátia de Alexandria ($\pm$ 370 d.C. a $\pm$ 415 d.C.) professora do Museu e primeira mulher a destacar-se no estudo da Matemática, marca o início do declínio daquele centro como pólo intelectual e do período das trevas para as civilizações ocidentais. Hipátia teve morte cruel, foi descarnada com conchas de ostras e queimada em praça pública por uma turba de cristãos incentivada pelo Patriarca de Alexandria, Cirilo.

Cem anos depois da morte de Hipátia, em 527 d.C., a Academia Platônica de Atenas já com 900 anos, bem como outras escolas, foi fechada e seus membros dispersos por Justiniano, Imperador Romano Católico. E por muitos séculos o desenvolvimento da Matemática esteve a cargo de outras civilizações, como a Árabe cuja maior contribuição foi na Álgebra. O conhecimento geométrico ficou, praticamente, estagnado e esquecido por dez séculos. Acredita-se que com a fuga dos professores gregos para a Pérsia, a civilização Árabe tomou o impulso relatado nos livros de História.

1.3 Axiomas de Hilbert

Dezoito séculos depois da publicação dos Elementos (1482), em plena Renascença, começaram a surgir as primeiras traduções dos Elementos para as línguas européias modernas, passando aquela obra a receber um estudo crítico pelos interessados.

Com a retomada do estudo dos Elementos de Euclides surgiram vários resultados surpreendentes que diziam respeito apenas à idéia de incidência. Por exemplo, Girard Desargues (1591 a 1661) e Blaise Pascal (1623 a 1662) demonstraram muitas propriedades não métricas de cônicas que eram bem diferentes daquelas examinadas por Apolônio dezoito séculos antes. O estudo de geometrias com poucos axiomas perdurou por mais dois séculos, às vezes de forma esporádica e desorganizada, outras com intensidade e imaginação.

Como pano de fundo ficava o postulado das paralelas, a secular dúvida se ele era ou não um axioma Euclidiano independente dos demais, sendo o mais instigante tópico de interesse dos geômetras. Muitos acreditaram que podia ser um teorema. Não é! Ao longo da história muitas demonstrações, erradas é claro, foram apresentadas, inclusive por matemáticos importantes em sua época. Ainda no tempo de Euclides, Ptolomeu I acreditou que tinha dado uma demonstração para o Axioma das Paralelas e tudo leva a crer que o próprio Euclides ficou relutante em aceitá-lo como postulado, utilizando-o apenas a partir da 292ª proposição dos Elementos. Algumas tentativas foram dramáticas, como aquela feita pelo padre jesuíta italiano Giovanni Saccheri (1667 a 1773). Ele, simplesmente, demonstrou todos os resultados básicos da hoje chamada Geometria Hiperbólica, mas não teve a ousadia para acreditar que poderiam existir outros tipos de modelos geométricos para a Natureza que não a Geometria Euclidiana.

Na metade do século XIX já tinham sido coletadas várias hipóteses assumidas por Euclides e utilizadas nas suas argumentações sem que tivessem tido uma demonstração ou uma axiomatização anterior.

Em 1898-99, o matemático alemão David Hilbert (1862 a 1943) apresentou um sistema de axiomas completo para a Geometria Euclidiana plana e espacial numa série de conferências na Universidade de Göttingen. Isto significa que todos os resultados dos Elementos permaneciam válidos assumindo seus postulados. Seu sistema axiomático é um dos marcos na História da Matemática pois organiza os fundamentos da Geometria e Análise. A comparação mais próxima que pode ser feita é com a organização ocorrida na Álgebra ao ser introduzido o conceito de *Grupo*.

Vários outros sistemas axiomáticos equivalentes ao de Hilbert foram propostos. Dois deles se destacam. Aquele estabelecido por George David Birkhoff (1864 a 1944), com forte ênfase no conceito de distância, e um outro conhecido pela sigla SMSG (School Mathematics Study Group) feito na década de 1960 por uma equipe de professores americanos dirigidos por

Edward G. Begle. Aqui, mais uma vez fatos políticos interferem nos caminhos da Matemática.

Com o lançamentodo primeiro satélite artificial pela extinta União Soviética, o Governo Americano decidiu reformular o ensino de Ciências nas escolas, nomeando e financiando grupos de estudos para elaborar as propostas da reforma. SMSG foi um dos grupos.

Logo após a fixação dos axiomas de Hilbert, o matemático americano Oswald Veblen (1880 a 1960) estabeleceu os axiomas da Geometria Projetiva na sua obra *Projective Geometry* em conjunto com John Wesley Young. Atualmente, o inglês H. M. S. Coxeter (1907) é considerado o maior geômetra sintético, tendo vários livros publicados na área.

Apresentamos a seguir os **Axiomas da Geometria Euclidiana Plana (ou Parabólica)** propostos por Hilbert.

I. Termos Indefinidos

1. Ponto, reta, plano, pertence, está entre e congruência.

II. Axiomas de Incidência

1. Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.

3. Existem pelo menos três pontos que não pertencem a uma mesma reta.

III. Axiomas de Ordem

1. Se um ponto B está entre A e C, então os três pontos pertencem a uma mesma reta e B está entre C e A.

2. Para quaisquer dois pontos distintos A e C, existe pelo menos um ponto B pertencente à reta $\overleftrightarrow{AC}$ tal que B está entre A e C.

3. Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.

4. (Pasch) Sejam A, B e C três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja l uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se l intercepta o segmento $\overline{AB}$, ela também intercepta o segmento $\overline{AC}$ ou o segmento $\overline{BC}$.

IV. Axiomas de Congruência

1. Se A e B são dois pontos distintos numa reta l e $A^{'}$ é um outro ponto de uma reta $l^{'}$, não necessariamente distinta

da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto B' em (um dado lado da reta) l', tais que os segmentos $\overline{AB}$, e $\overline{A'B'}$ sejam congruentes.

2. Se um segmento $\overline{A'B'}$ e um segmento $\overline{A''B''}$, são congruentes a um mesmo segmento $\overline{AB}$, então os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{A''B''}$ são congruentes entre si.

3. Sobre uma reta l, sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ dois segmentos da mesma que, exceto por B não têm pontos em comum. Além disto, sobre uma outra ou a mesma reta l', sejam $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ dois segmentos que, exceto por B' não têm pontos em comum. Neste caso se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

4. Se $\angle ABC$ é um triângulo e se $\overrightarrow{B'C'}$ é um raio, então existe exatamente um raio $\overrightarrow{A'B'}$ em cada lado de $\overline{B'C'}$ tal que $\angle A'B'A' \cong \angle ABC$. Além disso, cada ângulo é congruente a si mesmo.

5. Se para dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ as congruências $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ são válidas, então a congruência $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ é satisfeita.

V. Axioma das Paralelas

1. Seja l uma reta e A um ponto não em l. Então existe no máximo uma reta no plano que passa por A e não intercepta l.

VI. Axiomas de Continuidade

1. Axioma de Arquimedes: Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos, então existe um número natural n tal que n cópias de $\overline{CD}$ construídas contiguamente de A ao longo do raio $\overrightarrow{AB}$ passará além do ponto B.

2. Axioma da Completude da Reta: Uma extensão de um conjunto de pontos sobre uma reta com suas relações de congruência e ordem que poderiam preservar as relações existentes entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de congruência e ordem que seguem dos axiomas acima (menos o das paralelas) é impossível.

Para obtermos os **Axiomas da Geometria Euclidiana Espacial (ou Sólida)** devemos acrescentar ainda os seguintes:

VII. Axiomas sobre Planos

1. Em todo plano existe ao menos três pontos não colineares.
2. Nem todos os pontos pertencem ao mesmo plano.

3. Três pontos não colineares pertencem a um único plano.

4. Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então toda a reta está contida no plano.

5. Se dois planos têm em um ponto em comum eles têm um segundo ponto em comum.

Capítulo 2

Geometrias

Postula-se, a partir da divisão axiomática do sistema criado por Hilbert, isto é, a partir dos grupos de axiomas, algumas vezes com pequenas modificações, para se criar um modelo para outras Geometrias a serem estabelecidas.

2.1 Geometria Euclidiana

Construir um modelo para a Geometria Euclidiana é fixar um conjunto algébrico específico, que será chamado *plano*, estabelecer quais dos seus subconjuntos serão nomeados de *retas*, enfim, definir cada um dos termos indefinidos do sistema axiomático e, finalmente, verificar que todos os axiomas de Hilbert são válidos neste contexto.

Axiomas da Geometria Euclidiana Plana
I. Termos Indefinidos
II. Axiomas de Incidência
III. Axiomas de Ordem
IV. Axiomas de Congruência
V. Axioma das Paralelas
VI. Axiomas de Continuidade

2.1.1 O Conjunto $\mathbb{R}^n$

Denotaremos uma reta, um plano e um espaço euclidiano por $\mathbb{E}^1$, $\mathbb{E}^2$ e $\mathbb{E}^3$, respectivamente.

O conjunto das $1 - upla$ ordenadas, $\mathbb{R}^1 = (x); x \in \mathbb{R}$, é canonicamente identificado com o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Não distinguiremos uma $1 - upla$ ordenada $(x) \in \mathbb{R}$. Para construir uma correspondência um a um entre os números reais $\mathbb{R}$ e os pontos de uma reta Euclidiana $\mathbb{E}^1$, fixamos uma unidade e associamos a cada ponto de uma reta Euclidiana $\mathbb{E}^1$ um único número real, o qual chamamos abcissa do ponto. Com isto temos definido uma aplicação $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^1$, onde $P(x)$ é o ponto da reta Euclidiana cuja abscissa é x.

Escolhidos dois eixos Cartesianos num plano Euclidiano $\mathbb{E}^2$, digamos Ox e Oy, definimos $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$, onde $P(x, y)$ é o ponto do plano Euclidiano cuja abscissa é x e a ordenada é y. Reciprocamente cada ponto do plano é associado a um único par ordenado. Fixado o sistema de eixos, o Plano Euclidiano passa a ser chamado *Plano Cartesiano*.

Analogamente, fixados três eixos Cartesianos em $\mathbb{E}^3$, Ox, Oy e Oz, definimos a aplicação $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$, onde $P(x, y, z)$ é o ponto do plano Euclidiano tal que a abscissa é x, a ordenada é y e a altura é z. Passamos daí a chamar $\mathbb{E}^3$ de *Espaço Cartesiano*. O mesmo valerá para $\mathbb{E}^n$.

Foi neste contexto, isto é ao se perceber que, fixado um sistema de eixos cartesianos, poderia se fazer uma identificação canônica entre o espaço Euclidiano $\mathbb{E}^n$ e o conjunto algébrico $\mathbb{R}^n$ que surgiu a **Geometria Analítica**. Ela nos permite, por exemplo, calcular distância, ângulos, utilizando ferramentas da Álgebra Linear, como o produto interno.

É interessante notar que, ao contrário do que o termo nos induz a pensar, a Geometria Analítica **não** é um ramo da Geometria, mas um poderoso método para solucionar problemas possibilitando a transcrição de problemas geométricos em uma linguagem algébrica, o que muitas vezes, os tornam mais simples.

2.1.2 Plano Euclidiano

• Chamaremos $\mathbb{R}^2$, *plano* e a seus elementos, *pontos*.

Definição 2.1.1. *Um hiperplano com vetor normal $\eta \in \mathbb{R}^n$ contendo o ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é o subconjunto denotado e definido por $\Gamma_\eta(p) = \{v \in \mathbb{R}^n; \langle v - p, \eta\rangle = 0\}$. Notação: $\Gamma_\eta(p) : \langle v - p, \eta\rangle = 0$.*

• Um hiperplano em $\mathbb{R}^2$ será chamado de *reta*.

Sejam $p = (p_1, p_2)$ e $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ pontos em $\mathbb{R}^2$. O plano com reta normal η, passando por p é dado por

$$l_\eta(p) : \langle (x, y) - (p_1, p_2), (\eta_1, \eta_2)\rangle = 0$$

$$l_\eta(p) : \langle (x - p_1, y - p_2), (\eta_1, \eta_2)\rangle = 0$$

$$l_\eta(p) : \eta_1 x + \eta_2 y + (-\eta_1 p_1 - \eta_2 p_2) = 0$$

$$l_\eta(p) : \eta_1 x + \eta_2 y - \langle (p_1, p_2), (\eta_1, \eta_2) \rangle = 0$$

$$l_\eta(p) : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 = 0$$

Note que $l_\eta(p) = l_\lambda \eta(p)$.

A equação da reta que passa pela origem será denotada por

$$l_\eta : \eta_1 x + \eta_2 y = 0$$

l_η é subespaço próprio de $\mathbb{R}^2$, de dimensão um. Uma base é formada por qualquer vetor não nulo pertencente a l_η, por exemplo, $\eta^\perp = (-\eta_2, \eta_1)$.

• Entendemos o conceito de *um ponto pertencer a uma reta*.

Agora podemos verificar alguns axiomas:

• Dois pontos distintos determinam uma reta.

Dados $p = (p_1, p_2)$ e $q = (q_1, q_2)$, consideramos $q - p = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ e tomamos $\eta = (-q_2 + p_2, q_1 - p_1)$.

Então, $p, q \in l_\eta(p) = \langle (x, y) - (p_1, p_2), \lambda\eta \rangle = 0$.

• Está entre

Dada $l_\eta(p)$, defina $f : \mathbb{R} \longrightarrow l_\eta(p)$ por $f(t) = p + \lambda\eta^\perp$, onde $\eta^\perp$ é obtido a partir de η. Dado $\eta = (\eta_1, \eta_2) \Rightarrow \eta^\perp = (-\eta_2, \eta_1)$.

p está entre $q = f(t_0)$ e $r = f(t_2) \Leftrightarrow t_0 < t_1 < t_2$.

A definição deste último termo nos permite demonstrar todos os axiomas de ordem e continuidade, além de podermos definir segmentos de reta: o segmento $[p, q]$ é o conjunto formado pelos pontos p, q e os pontos que estão entre eles. O comprimento do segmento $[p, q]$ é a distância entre os extremos $d(p, q) = |b - a|$.

Lembramos que uma isometria do $\mathbb{R}^2$ é uma função de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva distância. Toda isometria é uma translação, rotação, reflexão ou uma composição destas funções.

As propriedades preservadas pelo *Grupo de Isometrias* - colinearidade, concorrência de retas, ângulos e distâncias - são chamadas *propriedades Euclideanas* [1].

Teorema 2.1.1. *Toda isometria f, pode ser escrita como $f(x) = U_0(x) + (u, v)$ onde U_0 é uma isometria que fixa a origem e $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.*

[1] Mais sobre Grupo de Isometrias, propriedades Euclidianas e geometria como ação de um grupo sobre um espaço pode ser encontrado na referência [2] ou no trabalho "Geometria no Plural - A visão de Klein", da mesma aluna, que será em breve disponibilizado.

Demonstração. Seja U_0' uma isometria que fixa a origem. Então $U_0'(x) = U_0(x)$ para alguma U_0, isometria que fixa a origem. De fato, $U_0'(x) = U_0(x) + (0,0) = U_0(x)$.

Seja U'' uma isometria que não fixa a origem. Então $U''(0) = (u,v)$, $u \neq 0$ ou $v \neq 0$.

Tome $U_0(x) = U''(x) - (u,v) \Rightarrow U_0(0) = (0,0)$ (i.é. U_0 fixa a origem). Então $U''(x) = U_0(x) + (u,v)$ como queríamos.

□

Como U_0 fixa a origem $\Rightarrow U_0$ é uma rotação em torno da origem ou uma reflexão por uma reta que passa pela origem, e tem matrizes em uma das formas:

$$U_0 = R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad ou \;\; U_0 = R_\theta^* = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & sen 2\theta \\ sen 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

Daí toda isometria f é da forma: $f(x) = R_\theta x + v$ ou $f(x) = R_\theta^* x + v$. Note que as matrizes acima são ortogonais, i.é., $R_\theta^{-1} = R_\theta^t$. Resulta o seguinte

Teorema 2.1.2. *Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria, se, e somente se, existe uma translação $T_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e um operador ortogonal $U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $f(x) = T_a \circ U(x)$.*

Entendido o conceito de isometria, podemos enunciar

• Dois segmentos são congruentes se existe uma isometria do $\mathbb{R}^2$ que aplica biunivocamente um segmento no outro.

• Ângulo

l_η indica a reta com vetor normal $\eta \neq 0$, orientada por η, i.é., o lado "de cima" da reta é para onde o vetor η aponta. l_η é a mesma reta, como conjunto de pontos, porém com orientação oposta, i.é. enquanto retas orientadas, elas são distintas.

O vetor v está no semiplano positivo $H_\eta(p)$ definido por l_η quando $\langle v - p, \eta \rangle \geq 0$ e no semiplano negativo quando $\langle v - p, \eta \rangle \leq 0$. É claro que quando $\langle v - p, \eta \rangle = 0$, $v \in l_\eta$.

Um ângulo é o conjunto obtido pela interseção entre dois semiplanos positivos $H_\eta(p) \cap H_\mu(q)$ e mede $\theta(\eta, -\mu)$.

• Dois ângulos são congruentes se existe uma isometria do $\mathbb{R}^2$ que aplica biunivocamente um ângulo no outro.

Com isso já é possível demonstrar todos os axiomas de congruência.

• Paralelas

Seja q um ponto tal que $q \notin l_\eta(p)$. Então, existe $l_\eta(q) \parallel l_\eta(p)$ e esta reta é única. Dizer que duas retas são paralelas é equivalente a dizer que o sistema formado por suas equações não tem solução.

2.1.3 Trigonometria

Dados 3 pontos, A, B, C não colineares do plano, podemos construir um triângulo $\triangle_{ABC}$, com vértices nestes pontos. Sejam α, β, γ as medidas dos ângulos cujos vértices são A, B, C e a, b, c as medidas dos lados opostos a estes vértices, respectivamente.

Então valem as leis dos senos e dos cossenos,

$$\frac{sin\alpha}{a} = \frac{sin\beta}{b} = \frac{sin\gamma}{c}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$$

generalizações do Teorema de Pitágoras.

Decorre da axiomatização da Geometria Euclidiana que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

2.1.4 Espaço Euclidiano

• Chamaremos $\mathbb{R}^3$ de *espaço* e seus elementos de *pontos*.

• Um hiperplano em $\mathbb{R}^3$ será chamado de *plano*.

Sejam $p = (p_1, p_2, p_3)$ e $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ pontos do $\mathbb{R}^2$. O plano $\Gamma_\eta(p)$ fica definido da seguinte forma:

$$\Gamma_\eta(p) : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z + k = 0, \text{ onde } k = -\langle p, \eta \rangle$$

O plano passando pela origem, fica,

$$\Gamma_\eta : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = 0$$

Γ_η é subespaço 2-dimensional de $\mathbb{R}^3$.

$v_0, w_0 \in \Gamma_\eta$ tal que $u = \alpha v_0 + \beta w_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,\{v_0, w_0, \eta\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$, i.é, $det\,[v_0, w_0, \eta] \neq 0$ e $\{v_0, w_0\}$ é uma base para Γ_η.

Uma retas em $\mathbb{R}^3$ é um conjunto determinado pela interseção de dois planos não paralelos.

Analogamente ao plano, definimos todos os termos envolvidos na axiomatização e construímos um modelo para a Geometria Espacial (Sólida).

Não nos concentramos muito na construção do modelo para a Geometria Euclidiana, pois este tema já foi tratado extensivamente no curso de Geometria Descritiva e Desenho Geométrico, durante todo este semestre. Estamos mais interessados em construir modelos para outras geometrias, como veremos a seguir.

2.2 Geometria Elíptica

O espaço considerado como modelo para a Geometria Elíptica é o $\mathbb{S}^2$, a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

Definição 2.2.1. *Uma esfera em $\mathbb{R}^n$ de raio $r > 0$ e centro $c \in \mathbb{R}^n$ é o subconjunto denotado e definido por*

$$S_r^{n-1}(c) = \{v \in \mathbb{R}^n : d(c,v) = r\}$$

$$d(c,v) = \|(v-c)\| = \|(v_1 - c_1, ..., v_n - c_n\| =$$
$$= \sqrt{(v_1-c_1)^2 + ... + (v_n-c_n)^2} = r \Rightarrow (v_1-c_1)^2 + ... + (v_n-c_n)^2 = r^2$$

$$\mathbb{S}^2 = \left\{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1\right\}$$

(esfera unitária canônica, onde $d(c,v) = 1$)

Axiomas

O sistema axiomático que consideraremos agora, omitirá o grupo de Axiomas de Ordem do sistema axiomático para a Geometria Euclidiana, fixado por Hilbert.

Como não é possível se estabelecer uma Ordem, no axioma 1 do Grupo de Congruência deve se omitir a expressão "UM DADO LADO DA RETA".

No Axioma das Paralelas estabeleceremos que **sempre** ocorre interseção entre quaisquer duas retas (círculos maiores da esfera) e essa interseção é dupla.

I. Termos Indefinidos
1. Ponto, reta, plano, pertence e congruência.

II. Axiomas de Incidência
1. Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.
2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.

3. Existem pelo menos três pontos que não pertencem a uma mesma reta e todos estão sobre o mesmo plano.

IV. Axiomas de Congruência

V. Axioma das Paralelas

1. Seja l uma reta e A um ponto não em l. Então toda reta que passa por A intercepta l.

VI. Axiomas de Continuidade

1. Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta menos um de seus pontos.

2.2.1 Plano Elíptico

• Chamaremos $\mathbb{S}^2$ de *plano elíptico* e seus elementos de *pontos elípticos*.

Distância Elíptica

Dados $u, v \in \mathbb{S}^2, \theta(u, v) \in [0, \pi]$. Como $\|u\| = \|v\| = 1$, temos,

$$cos\theta(u, v) = \langle u, v\rangle$$

$$sen\theta(u, v) = \|u \times v\|$$

Definimos a distância em $\mathbb{S}^2$ como,

$$d : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ d(u, v) = \theta(u, v)$$

d é uma *função distância*, i.é. satisfaz às propriedades:
1. $d(u, v) \geq 0$, a igualdade só se verifica quando $u = v$;
2. $d(u, v) = d(v, u)$
3. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

• Um grande círculo em $\mathbb{S}^2$ será chamado *reta elíptica*.

$r_\eta \subset \mathbb{S}^2$ é uma reta elíptica se $r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$, onde Γ_η é o plano no $\mathbb{R}^3$ que contém a origem e tem $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, como vetor normal.

Portanto, $r_\eta = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = 0\right\}$

Dizemos que $v \in \mathbb{S}^2$ e $r_\eta \subset \mathbb{S}^2$ são incidentes quando $v \in r_\eta$

Proposição 2.2.1. *(***Condição de Incidência***) Dados um ponto $v \in \mathbb{S}^2$ e um grande círculo $r_\eta \in \mathbb{S}^2$. Temos:*

$$v \text{ e } r_\eta \text{ são incidentes} \Leftrightarrow \langle v, \eta\rangle = 0$$

Demonstração. Sabemos que $v \in \mathbb{S}^2$ e $r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$. Logo $v \in r_\eta \Leftrightarrow v \in \Gamma_\eta$ $\Leftrightarrow \langle v, \eta \rangle = 0$. □

Com isto já nos é possível verificar o grupo de axiomas de incidência da Geometria Elíptica.

Nota (Geometria Diferencial): r_η é chamada geodésica. O vetor binormal de r_η num ponto p é paralelo ao vetor normal do plano que determina r_η. E o vetor normal a $\mathbb{S}^2$ em p é paralelo ao vetor normal de r_η.

• Dois pontos distintos determinam uma reta.

Sejam $u, v \in \mathbb{S}^2$ distintos $\Rightarrow \eta = u \times v \neq 0 \Leftrightarrow u \neq -v$.

Suponha $u \neq -v$. Temos Γ_η e $r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$. Como $\langle u, \eta \rangle = 0 = \langle v, \eta \rangle \Rightarrow$ $u, v \in r_\eta$.

Suponha agora $u = -v$. Seja $\eta \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle u, \eta \rangle = 0$. Como $u = -v \Rightarrow$ $\langle v, \eta \rangle = 0 \Rightarrow u, v \in r_\eta$. Esta reta não é única já que existem infinitos planos contendo a origem, u e v, colineares.

No plano elíptico não existe paralelismo, nem a propriedade de intersecção única entre duas retas. Ao contrário,

Sejam Γ_η e Γ_ν dois planos distintos que passam pela origem, determinados pelos vetores normais η e ν respectivamente. Tais planos interseccionam $\mathbb{S}^2$ nas retas elípticas r_η e r_ν, i.é., $r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$ e $r_\nu = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\ni$.

Então, $r_\eta \cap r_\nu = \mathbb{S}^2 \cap (\Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu) \Rightarrow r_\eta \cap r_\nu = \mathbb{S}^2 \cap t_v$, onde t_v é a reta cujo vetor diretor é $v = \eta \times \nu$. Segue que $r_\eta \cap r_\nu = \{u_1, u_2\}$.

Mais formalmente, temos a seguinte

Proposição 2.2.2. (Concorrência de Duas Retas) *Duas retas elípticas distintas r_η e r_ν sempre se interseptam em dois pontos, a saber,*

$$u_1 = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu \ \text{ e } u_2 = -\frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu$$

Proposição 2.2.3. (Colinearidade de três Pontos) *Dados três pontos $u, v, w \in \mathbb{S}^2$. Temos:*

$$u, v, w \text{ são colineares} \Leftrightarrow det\,[u, v, w] = 0$$

Demonstração. Sejam $u, v, w \in \mathbb{S}^2$ distintos e $v \neq -w$. Então, u, v, w são colineares $\Leftrightarrow u, v, w \in r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ para algum vetor η normal ao plano Γ_η.

Seja $\eta = u \times v$. Sabemos que $u, v \in \Gamma_\eta$ e como $r_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$. Portanto, u, v, w são colineares $\Leftrightarrow w \in \Gamma_\eta$, i.é., $\langle w, \eta \rangle = 0$.

Segue que u, v, w são colineares $\Leftrightarrow \langle w, \eta \rangle = \langle w, u \times v \rangle = det\,[u, v, w] = 0$. $\square$

Proposição 2.2.4. (Equação de Concorrência para três Retas) *Dadas três retas elípticas, digamos r_η, r_μ e r_ν. Temos:*

$$r_\eta, r_\mu \text{ e } r_\nu \text{são concorrentes} \Leftrightarrow det\,[r_\eta, r_\mu, r_\nu] = 0$$

Demonstração. Sejam u_1 e u_2 pontos de interseção das retas elípticas r_η e r_μ. Então, $\langle u_1, \eta \rangle = \langle u_1, \mu \rangle = \langle u_2, \eta \rangle = \langle u_2, \mu \rangle = 0$.

r_ν é concorrente com r_η e r_μ $\Leftrightarrow \langle u_1, \nu \rangle = \langle u_2, \nu \rangle = 0 \Leftrightarrow \eta, \mu, \nu$ são coplanares (Euclidiana) $\Leftrightarrow \langle \nu, \eta \times \mu \rangle = 0 \leftrightarrow det\,[r_\eta, r_\mu, r_\nu] = 0$. $\square$

• Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta elíptica menos um de seus pontos.

A demonstração deste fato envolve a idéia de projeção estereográfica. Imagine a reta elíptica (um círculo) feita de arame. A reta elíptica menos um ponto é equivalente a fazermos um corte neste arame e abrirmos o arco, formando um "meio círculo". Apoiamos este arco sobre a reta real, de forma tangente. As semi-retas que partem do centro do "círculo" projetam cada ponto da reta elíptica menos um ponto sobre $\mathbb{R}$ de forma biunívoca.

O gráfico da função $\alpha(\theta) = (\cos\theta, sen\theta)$, definida do intervalo $(0, 2\pi)$ em $\mathbb{R}^2$ é exatamente o círculo unitário menos um ponto, $\mathbb{S}^1 - \{(1,0)\}$. Assim, temos que, em um certo sentido, o intervalo $(0, 2\pi)$ e o círculo unitário menos um ponto são *a mesma coisa*.

Considere agora $f : (0,1) \longrightarrow (0, 2\pi)$, dada por $f(t) = 2\pi t$ e $g : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \tan \pi \left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Segue que $g \circ f^{-1} : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a bijeção procurada. Portanto, existe uma correspondência um-a-um entre $(0, 2\pi)$ e $\mathbb{R}$. Por transição, o resultado segue.

2.2.2 Retas Elípticas Orientadas

Γ_η está orientada por η, i.é. η aponta para o lado de cima do plano. Um vetor v está no semiespaço positivo, definido pelo plano Γ_η, se $\langle v, \eta \rangle \geq 0$ e no semiespaço negativo, se $\langle v, \eta \rangle \leq 0$. Se $\langle v, \eta \rangle = 0$, então v pertence ao plano.

Para determinar um plano orientado que passe pela origem, precisamos apenas de vetor unitário $\eta \in \mathbb{S}^2$. Tal plano será denotado por Γ_η. Γ_η e $\Gamma_{-\eta}$ são iguais como conjuntos, porém diferentes enquanto planos orientados.

Dizer que a reta r_η tem orientação positiva, significa que se uma pessoa percorre o gráfico de r_η, sobre a parte "de cima" do plano, i.é. com a cabeça voltada para onde o vetor normal aponta, então a parte interior do círculo cujo bordo é r_η, fica à esquerda desta pessoa. Formalizando:

$$p \in r_\eta \Rightarrow p \times \eta = \phi_\eta(p),$$

onde ϕ_η é o vetor tangente à geodésica no ponto p e descreve a velocidade de uma pessoa fazendo o percurso *positivo* sobre a curva.

2.2.3 Isometrias

O conceito de isometria será importante para obtermos a idéia de congruência na geometria esférica.

Definição 2.2.2. *Uma isometria em $\mathbb{S}^2$ é uma aplicação $U : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ que preserva distância, i.é., $\theta(U(u), U(w)) = \theta(v, w)$ para todo $v, w \in \mathbb{S}^2$.*

Teorema 2.2.1. (Classificação de Isometrias em $\mathbb{S}^2$ - Leonhard Euler, 1707 - 1783): *Uma aplicação $U_0 : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é uma isometria $\Leftrightarrow$ U_0 for a restrição de um operador ortogonal $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um operador ortogonal. Como U preserva norma $\Rightarrow \|U(u)\|^2 = \langle U(u), U(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2 \Rightarrow U|_{\mathbb{S}^2} = U_0 :$ '$S^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ está bem definida.

Agora dados $u, v \in \mathbb{S}^2$, temos

$$\theta(U_0(u), U_0(v)) = \langle U(u), U(v)\rangle = \langle u, v\rangle = \theta(u, v).$$

Logo U_0 preserva a distância esférica.

($\Rightarrow$)Dada $U_o : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ uma isometria na esfera, definimos $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, como

$$U(v) = \begin{cases} \|v\| \, U_0\left(\frac{v}{\|v\|}\right) & , \quad v \neq 0 \\ 0 & , \quad v = 0 \end{cases}$$

1. U está bem definida.

Seja $u = v \neq 0 \Rightarrow \|u\| = \|v\| \Rightarrow \frac{u}{\|u\|} = \frac{v}{\|v\|}$.

Calculamos $U(u)$ e $U(v) \Rightarrow U(u) = \|u\| \, U_0\left(\frac{u}{\|u\|}\right)$ e $U(v) = \|v\| \, U_0\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$.

Como U_0 é isometria e está bem definida em $\mathbb{S}^2$, temos $U_0\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = U_0\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$, já que $\frac{u}{\|u\|}$ e $\frac{v}{\|v\|}$ têm norma igual a um, i.é., pertencem ao $\mathbb{S}^2$.

Segue que $U(u) = U(v)$.

2. U é ortogonal.

$\|U(v)\|^2 = \left\langle \|v\| U_o\left(\frac{v}{\|v\|}\right), \|v\| U_o\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\rangle = \|v\|^2 \left\langle U_o\left(\frac{v}{\|v\|}\right), U_o\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\rangle = \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2}\langle v, v\rangle = \|v\|^2$.

3. A restrição de U ao $\mathbb{S}^2$ é U_0.

$U|_{\mathbb{S}^2} = U_o$, pois $v = 0 \notin \mathbb{S}^2$, logo $U|_{\mathbb{S}^2} = \|v\| U_0\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$. Como $v \in \mathbb{S}^2 \Rightarrow \|v\| = 1$, temos:

$$U|_{\mathbb{S}^2}(v) = U_0(v)$$

□

2.2.4 Congruência

Dois pontos distintos $u, v \in r_\eta$ definem dois segmentos de reta elíptica: o arco maior e o arco menor. Definir qual dos dois pretendemos usar é mencionar um terceiro ponto w que deverá pertencer a r_η.

- Dois segmentos são congruentes se existe uma isometria de $\mathbb{S}^2$ que aplica biunivocamente, um segmento no outro.

Diante disso, os três primeiros axiomas do Grupo de Congruência são válidos, no modelo elíptico.

Definição 2.2.3. *O semiplano positivo $\mathbb{H}_\eta$ definido pela reta elíptica orientada, r_η, é o hemisfério formado pelos pontos $u \in \mathbb{S}^2$ tais que $\langle u, \eta\rangle \geq 0$. Analogamente, o semiplano negativo é o hemisfério formado pelos pontos $u \in \mathbb{S}^2$ tais que $\langle u, \eta\rangle \leq 0$.*

Definição 2.2.4. *Um ângulo, ou uma lua, no plano elíptico $\mathbb{S}^2$, determinado por duas retas elípticas distintas e orientadas, r_η e r_μ, é o conjunto $\mathbb{L}_{\eta\mu}$ Obtido pela interseção dos semiplanos positivos determinados por elas, a saber, $\mathbb{L}_{\eta\mu} = \mathbb{H}_\eta \cap \mathbb{H}_\mu$.*

Os vértices da lua $\mathbb{L}_{\eta\mu}$ são os pontos:

$$u = \frac{1}{\|\eta \times \mu\|}\eta \times \mu \quad e \quad -u = -\frac{1}{\|\eta \times \mu\|}\eta \times \mu$$

A medida de uma lua $\mathbb{L}_{\eta\mu}$ é dada por $\theta(\mu, -\eta)$.

Definidos estes termos, valem as mesmas idéias sobre ângulos da Geometria Euclidiana: ângulos obtusos, ângulos agudos, ângulos retos, ângulos suplementares, ângulos complementares, ângulos opostos pelo vértice, etc...

• Duas luas são congruentes se existe uma isometria de $\mathbb{S}^2$ que aplica biunivocamente uma lua na outra.

Definição 2.2.5. (Triângulo Elíptico): *Sejam $u, v, w \in \mathbb{S}^2$ tais que $\{u, v, w\}$ seja uma base ordenada, positiva, de $\mathbb{R}^3$, i.é. $det\,[u, v, w] > 0$. Tais pontos são vértices de um chamado triângulo elíptico, $\triangle_{uvw}$. Os lados deste triângulo são as retas elípticas r_η, r_μ e r_ν, onde*

$$\eta = u \times v,\ \ \mu = v \times w,\ \ \nu = w \times u,$$

i.é., $\triangle_{uvw} = \mathbb{H}_\eta \cap \mathbb{H}_\mu \cap \mathbb{H}_\nu$.

Note que a ordem dos pontos u, v, w é cíclica: $u \to v, v \to w, w \to u$.

• Dois triângulos elípticos são congruentes se existe uma isometria que aplica biunivocamente um triângulo sobre o outro.

• Uma reta elíptica menos um de seus pontos é um modelo de uma reta euclidiana.

2.2.5 Trigonometria

Seja $\triangle_{uvw}$ um triângulo elíptico, com $u, v, w \in \mathbb{S}^2$. Estabelecemos a seguinte notação correspondente a cada um dos vértices:

Vértice u
- o lado oposto, a, está contido em r_μ, $\mu = v \times w$.
- o ângulo $\alpha = \pi - \theta(\nu, \eta)$.
- $a = \theta(v, w)$.

Vértice v
- o lado oposto, b, está contido em r_ν, $\nu = w \times \mu$.
- o ângulo $\beta = \pi - \theta(\nu, \mu)$.
- $b = \theta(w, u)$.

Vértice w
- o lado oposto, c, está contido em r_η, $\eta = \mu \times v$.

- ângulo $\gamma = \pi - \theta(\mu, \nu)$.
- $c = \theta(u, v)$.

Lema 2.2.1. *Estabelecida a notação acima, temos*

$$\eta \times \mu = \langle \nu, v \rangle\, v, \qquad \mu \times \nu = \langle \eta, w \rangle\, w, \qquad \nu \times \eta = \langle \mu, u \rangle\, u$$

do que resultam as seguintes igualdades:

$$\|\eta \times \mu\| = \|\mu \times \nu\| = \|\nu \times \eta\|$$

Demonstração. As primeiras igualdades decorrem das propriedades do produto vetorial duplo. Por exemplo, vejamos a terceira igualdade, as demais são análogas.

$$\nu \times \eta = (w \times u) \times (u \times v) = \langle w, u \times v \rangle\, u - \langle u, u \times v \rangle\, w = \langle w, u \times v \rangle\, u = \langle w, \eta \rangle\, u$$

Aplicando as propriedades do produto misto e a simetria do produto interno, temos

$$\langle w, \eta \rangle = \langle w, u \times v \rangle = \langle u, v \times w \rangle = \langle v \times w, u \rangle = \langle \mu, u \rangle$$

Do que decorre a igualdade que queríamos provar.

Procedendo da mesma forma para demonstrar as demais igualdades, obtemos $\langle \mu, u \rangle = \langle \eta, w \rangle = \langle \nu, v \rangle \Rightarrow \|\langle \mu, u \rangle\| = \|\langle \eta, w \rangle\| = \|\langle \nu, v \rangle\|$

Agora para mostrar o resultado do Lema, basta tomar as normas das igualdades mostradas:

$$\|\nu \times \eta\| = \|\langle \mu, u \rangle\, u\| = \|\langle \mu, u \rangle\|\, \|u\| = \|\langle \mu, u \rangle\|$$

Analogamente,

$$\|\mu \times \nu\| = \|\langle \eta, w \rangle\|$$

$$\|\eta \times \mu\| = \|\langle \nu, v \rangle\|$$

E o resultado segue. □

Proposição 2.2.5. *Seja $\triangle_{uvw}$ um triângulo elíptico. Utilizando nossa notação, temos $sen(\alpha)sen(b)sen(c) = sen(a)sen(\beta)sen(c) = sen(a)sen(b)sen(\gamma)$.*

Demonstração. Sabemos que $sen\theta(\nu, \eta) = \frac{\|\nu \times \eta\|}{\|\nu\|\|\eta\|} \Rightarrow \|\nu \times \eta\| = \|\nu\|\, \|\eta\|\, sen\theta(\nu, \eta) = sen(b)sen(c)sen(\pi - \alpha) = sen(b)sen(c)sen(\alpha)$

pois, $b = \theta(w, u) \Rightarrow sen(b) = sen\theta(w, u) = \|w \times u\| = \|\nu\|$.

Analogamente, obtemos

$$\|\nu \times \eta\| = sen(a)sen(c)sen(\beta)$$

$$\|\mu \times \nu\| = sen(a)sen(b)sen(\gamma)$$

Pelo Lema anterior (igualdade das normas) o resultado segue. □

Teorema 2.2.2. *Seja $\triangle uvw$ um triângulo elíptico. Então:*

$$\frac{sen(\alpha)}{sen(a)} = \frac{sen(\beta)}{sen(b)} = \frac{sen(\gamma)}{sen(c)}$$

$$cos(\gamma) = \frac{cos(c) - cos(a)cos(b)}{sen(a)sen(b)}$$

Demonstração. (Lei dos Senos) - A demonstração decorre diretamente da proposicção anterior. Como $sen(\alpha)sen(b)sen(c) = sen(a)sen(\beta)sen(c)$, temos

$$sen(\alpha)sen(b) = sen(a)sen(\beta)$$

$$\frac{sen(\alpha)}{sen(a)} = \frac{sen(\beta)}{sen(b)}$$

A conta é análoga para as outras igualdades e o resultado segue.

(Lei dos Cossenos) - Temos $\langle \mu, \nu \rangle = \langle v \times w, w \times u \rangle =^{2} \langle \langle v, w \rangle, \langle w, u \rangle \rangle - \langle \langle v, u \rangle, \langle w, w \rangle \rangle = cos\theta(v,w)cos\theta(w,u) - cos\theta(v,u) = cos(a)cos(b) - cos(c)$

Por outro lado, $\langle \mu, \nu \rangle = \|\mu\| \|\nu\| cos\theta(\mu, \nu) = sen(a)sen(b)cos(\pi - \gamma) = -sen(a)sen(b)cos(\gamma)$ □

Para apresentarmos o último teorema desta seção precisamo antes compreender como calcular áreas de luas da esfera unitária.

Arquimedes considerava seu mais belo teorema aquele que estabelece a igualdade entre as áreas de uma esfera de raio r e de um cilindro circunscrito a ela, de altura $2r$: Área $= 4\pi r^2$.

Ele e seus contemporâneos acharam o resultado tão fascinante que inscreveram a figura que o ilustra na lápide de Arquimedes.

Seja $\mathcal{L}$ a superfície lateral do cilindro. Podemos definir

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ & p & \longmapsto & f(p) \end{array}$$

Esta aplicação tem uma propriedade interessante: preserva áreas!

Assim, uma lua em $\mathbb{S}^2$ com ângulo α é obtida pela projeção de uma faixa de largura α e altura 2 e sua área é dada por Área$(\mathbb{L}) = 2\alpha$.

Teorema 2.2.3. (Teorema de Girard) *Seja $\triangle_{uvw}$ um triângulo elíptico e considere a notação estabelecida no início da seção. Então:*

$$\acute{A}rea(\triangle_{uvw}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

consequentemente, $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

[2]Identidade de Lagrange: $\langle a \times b, c \times d \rangle = det \begin{pmatrix} \langle a, c \rangle & \langle a, d \rangle \\ \langle b, c \rangle & \langle b, d \rangle \end{pmatrix}$

Demonstração. Podemos calcular as áreas das luas

$$\mathbb{L}_{\nu\eta} = 2\alpha, \quad \mathbb{L}_{\eta\mu} = 2\beta, \quad \mathbb{L}_{\mu\nu} = 2\gamma$$

Considere as luas simétricas $\mathbb{L}^-$. Elas têm de mesma área das luas $\mathbb{L}$ acima, respectivamente. Portanto, $\mathbb{S}^2 = \mathbb{L}_{\nu\eta} \cup \mathbb{L}_{\eta\mu} \cup \mathbb{L}_{\mu\nu} \cup \mathbb{L}^-_{\nu\eta} \cup \mathbb{L}^-_{\eta\mu} \cup \mathbb{L}^-_{\mu\nu}$.

Mas, $\triangle_{uvw} = \mathbb{L}_{\nu\eta} \cap \mathbb{L}_{\eta\mu} \cap \mathbb{L}_{\mu\nu}$ e $\triangle^-_{uvw} = \mathbb{L}^-_{\nu\eta} \cap \mathbb{L}^-_{\eta\mu} \cap \mathbb{L}^-_{\mu\nu}$ aparecem três vezes cada.

Por isso, para o calculo da área, devemos escrever

$$\text{Área}(\mathbb{S}^2) = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\text{Área}\triangle_{uvw} - 2\text{Área}\triangle^-_{uvw}$$

$$4\pi = 4(\alpha + \beta + \gamma) - 4\text{Área}(\triangle)_{uvw}$$

$$\text{Área}(\triangle)_{uvw} = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Como a área é uma grandeza positiva, temos $(\alpha + \beta + \gamma) - \pi > 0 \Rightarrow (\alpha + \beta + \gamma) > \pi$ □

2.3 Geometria Projetiva

Você já pensou porque ao viajar por uma estrada que tem lados, supostamente paralelos, eles parecem se encontrar num ponto muito distante? Ou em como pode ser possível retratar numa tela bidimensional uma paisagem tridimensional?

Ao refletirmos sobre tais questões percebemos que a Geometria Euclidiana a qual estamos tão habituados parece não ser um modelo da realidade tão próximo da forma como a visualizamos, quanto pensávamos.

Também chamada Geometria Elíptica Simples, a Geometria Projetiva procura apresentar um modelo coerente com nossa percepção de mundo.

É certamente a mais simples, com dois grupos axiomáticos apenas, o de incidência e o de continuidade, não envolvendo problemas de congruência e de ordem.

Axiomas

O alemão Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867) foi o primeiro matemático que viu a possibilidade de construir uma Geometria lógica sem o conceito de congruência. Na sua época as atenções estavam voltadas para o exame de estruturas geométricas simples. Uma tal geometria define-se, essencialmente, postulando axiomas de incidência. Mas o primeiro a propor o acréscimo de *pontos ideais* (logo veremos de que se tratam) foi o astrônomo Johannes Kepler (1571-1630). Sugestão desprezada na época.

I. Termos Indefinidos
1. Ponto, reta, plano, pertence.

II. Axiomas de Incidência

V. Axioma das Paralelas
1. Seja l uma reta e A um ponto não em l. Então toda reta que incide em A intercepta l.

VI. Axiomas de Continuidade
1. Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta menos um de seus pontos.

2.3.1 Plano Projetivo

Queremos construir um modelo para a Geometria Projetiva. Considere o espaço $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, isto é, o $\mathbb{R}^3$ perfurado na origem. Considere ainda a relação de equivalência

$$v \sim w \Leftrightarrow \text{existe um número real } \lambda \neq 0, \text{ tal que } v = \lambda w.$$

Tome o quociente $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$

• Chamaremos $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$ de plano projetivo e seus elementos de pontos projetivos.

Um ponto projetivo $\overline{v}$, $v \neq 0$, é uma classe de equivalência

$$v = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda \neq 0\}$$

O subconjunto $\overline{v}$ é uma reta perfurada em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

A aplicação quociente é denotada por

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{RP}^2 \\ & v & \longmapsto & \overline{v} \end{array}$$

Notação: $\overline{v} = (v_1 : v_2 : v_3) \in \mathbb{RP}^2$. A tripla é chamada *coordenada homogênea* de $\overline{v}$.

Relação entre $\mathbb{RP}^2$ e $\mathbb{S}^2$

Para cada $\overline{v} \in \mathbb{RP}^2$ podemos determinar dois pontos na esfera unitária

$$u = \frac{v}{\|v\|} \quad e \quad \text{seu antípoda}, \; -u = -\frac{v}{\|v\|}$$

Segue que $\overline{v} = \overline{u} = \overline{-u}$.
Assim,

$$\begin{array}{rccc} \psi|_{\mathbb{S}^2} = \psi_0 : & \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{RP}^2 \\ & u & \longmapsto & \overline{u} \end{array}$$

ψ_0 é sobrejetora.
De fato, dado $\overline{v} \in \mathbb{RP}^2$, $\exists \left\{ u = \frac{v}{\|v\|} \;, \quad -u = -\frac{v}{\|v\|} \right\} \in \mathbb{S}^2$ *tal que* $\psi(u) = \psi(-u) = \overline{v}$

Isto nos dá uma idéia: podemos construir o plano projetivo sobre $\mathbb{S}^2$!
Sejam $u, v \in \mathbb{S}^2$. Então a relação de equivalência se torna

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \;\; ou \;\; u = -v \;\; e$$

$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2 / \sim$$

isto é $\overline{v} \in \mathbb{RP}^2$ pode ser representado por $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{S}^2$ com $u_3 \neq 0$, ou seja, estamos no hemisfério norte da esfera,

$$\mathbb{H}_{e_3} = \left\{ u \in \mathbb{S}^2 : \langle u, e_3 \rangle = u_3 \geq 0 \right\}$$

$\psi|_{\mathbb{H}_{e_3}} = \psi_0 : \mathbb{H}_{e_3} \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ é sobrejetora.
Dado $\overline{v} \in \mathbb{RP}^2$, existe

$$\begin{cases} u = \frac{v}{\|v\|} \in \mathbb{S}^2, & se \;\; u_3 > 0 \\ u, \quad -u \in \mathbb{S}^2, & se \;\; u_3 = 0 \end{cases}$$

Considere a reta elíptica $r_{e_3} \subset \mathbb{S}^2$,

$$r_{e_3} = \left\{ u \in \mathbb{S}^2 : u_3 = 0 \right\}$$

então os pontos da imagem de r_{e_3} por ψ_0 são chamados *pontos ideais* e representados por I_∞.

Agora sim, obtivemos uma bijeção $\psi_0 : \mathbb{H}_{e_3} / r_{e_3} \longrightarrow \mathbb{RP}^2 / I_\infty$[3].

[3]Ou seja, estamos *identificando* todos os pontos pertencentes a reta r_{e_3}, obtida pela interseção da esfera unitária com o plano xy. *Identificar* traz consigo a idéia de que todos esses pontos passam a ser representados como um único e mesmo ponto no conjunto quociente.

2.3.2 Retas Projetivas

Sabemos que na Geometria Euclidiana Plana, uma reta é a menor distância entre dois pontos. Também na Geometria Elíptica, uma geodésica (reta elíptica ou grandes círculos) em $\mathbb{S}^2$ é a menor distância entre dois pontos elípticos. Para definirmos o que vem a ser uma reta projetiva, nada mais natural do que perguntarmos: qual seria a menor trajetória entre dois pontos $\overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{RP}^2$?

Para respondermos a esta pergunta, precisamos primeiro da noção de distância em $\mathbb{RP}^2$.

A distância clássica em $\mathbb{RP}^2$ é definida como

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\overline{v}, \overline{w}) & \longmapsto & \text{mín}\,\{\theta(a,b), \theta(a,-b)\} \end{array}$$

onde $a, b \in \mathbb{S}^2$ são representantes quaisquer das classes $\overline{v}$ e $\overline{w}$ respectivamente.

Agora podemos definir

• Um subconjunto $r \subset \mathbb{RP}^2$ é uma reta projetiva se r for a imagem de uma reta elíptica pela projeção $\psi_0 : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$.

ou, usando o modelo do espaço perfurado, temos

• Um subconjunto $r \subset \mathbb{RP}^2$ é uma reta projetiva se r for a imagem de uma reta perfurada pela projeção $\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^2$.

Já vimos que um plano $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ que contém a origem fica determinado por seu vetor normal $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \neq 0$. Todo múltiplo de η, $\lambda\eta$, com $\lambda \neq 0$, determinará o mesmo plano.

Naturalmente, pensamos em considerar $\overline{\eta} \in \mathbb{RP}^2$.

Ora, sabemos que r_η é uma geodésica $\Leftrightarrow r_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$. Também, sabemos que $\psi(r_\eta)$ é uma reta projetiva. Logo, podemos denotar a reta projetiva por $r_{\overline{\eta}}$, isto é reta projetiva determinada pela projeção por ψ do grande círculo $\Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2 = \Gamma_{\lambda\eta} \cap \mathbb{S}^2$.

Nesta notação, r_{e_3} é a reta de pontos ideais, I_∞.

2.3.3 Plano Projetivo Dual

A fim de prosseguirmos com a verificação axiomática, é útil a idéia de Plano Projetivo Dual.

Sabemos que cada ponto projetivo $\overline{\eta} \in \mathbb{RP}^2$ determina uma única reta projetiva $r_{\overline{\eta}}$ e cada reta projetiva $r \subset \mathbb{RP}^2$ determina um único ponto projetivo $\overline{\eta}$.

Seja $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{RP}^2)$, dado por $\mathcal{R} = \left\{ r_{\overline{\eta}} : \overline{\eta} \in \mathbb{RP}^2 \right\}$, onde $\mathcal{P}(\mathbb{RP}^2)$ é o conjunto das partes de $\mathbb{RP}^2$, isto é, seus elementos são todos os subconjuntos de $\mathbb{RP}^2$.

Assim, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{R}$ e $\mathbb{RP}^2$, $r_{\overline{\eta}} \longleftrightarrow \overline{\eta}$, logo existem tantas retas projetivas quantos pontos projetivos!

Tomamos $\mathbb{RP}^2$ como modelo para o cojunto das retas projetivas $\mathcal{R}$, a partir de agora indicado por $\mathbb{RP}^{2^*}$ e denominado plano projetivo dual. Assim

$$r_{\overline{\eta}} \subset \mathbb{RP}^2 \Leftrightarrow \overline{\eta} \in \mathbb{RP}^{2^*}$$

Recordemos que até o momento definimos, plano, reta e ponto projetivos. Continuemos com nossa verificação axiomática.

Proposição 2.3.1. *Dados um ponto projetivo $\overline{v} \in \mathbb{RP}^2$ e uma reta projetiva $\overline{\eta} \subset \mathbb{RP}^{2^*}$, temos*

$$\overline{v} \ \ e \ \ r_{\overline{\eta}} \ \textit{são incidentes} \Leftrightarrow \langle v, \eta \rangle = 0$$

Demonstração. Seja $\Gamma_\eta \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

$$\langle v, \eta \rangle = 0 \Leftrightarrow v \in \Gamma_\eta \Leftrightarrow \pm \frac{v}{\|v\|} \in r_\eta \subset \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2 \Leftrightarrow \overline{v} = \overline{\left(\frac{v}{\|v\|} \right)} \in r_{\overline{\eta}}$$

□

- Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

Proposição 2.3.2. (Equação de uma Reta por dois Pontos) *Por dois pontos projetivos distintos existe uma única reta projetiva, a saber,*

$$\overline{\eta} = \overline{v \times w} \in \mathbb{RP}^{2^*}$$

Demonstração. (Existência) Sejam $a, b \in \mathbb{S}^2$ representantes das classes de equivalências dos pontos projetivos $\overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{RP}^2$ dados, respectivamente. Como $\overline{v} \neq \overline{w}$ por hipótese, então $b \neq \pm a$.

Considere o plano Γ_η, onde $\eta = a \times b$. Γ_η é o único plano que contém a, b e a origem. Além disso, $\mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta = r_\eta$ e $\psi(r_\eta) = r_{\overline{\eta}}$ é reta projetiva.

Como a e b são pontos de r_η, suas imagens por ψ pertencem a $r_{\overline{\eta}}$.

$$\psi(a) = \overline{a} = \overline{v} \ \ e \ \ \psi(b) = \overline{b} = \overline{w}$$

$$\overline{\eta} = \psi(\eta) = \psi(a \times b) = \psi(\overline{a}) \times \psi(\bar{b}) = \overline{v} \times \overline{w} = \overline{v \times w}$$

(Unicidade) Suponha que exista $r_{\overline{\mu}} \neq r_{\overline{\eta}}$ passando por $\overline{v}$ e $\overline{w}$. Como $r_{\overline{\mu}} \neq r_{\overline{\eta}} \Rightarrow \overline{\mu} \neq \overline{\eta}$.

Por definição, r_μ é a reta projetiva pertencente a $\mathbb{RP}^2$ determinada pela projeção da geodésica $r_\eta = \Gamma_\mu \cap \mathbb{S}^2$ (Atenção: lembre que, sendo r_η uma geodésica, Γ_μ necessariamente passa pela origem).

Sabemos que dado μ só existe um plano Γ_μ correspondente. Logo, como $\overline{\mu} \neq \overline{\eta} \Rightarrow \mu \neq \pm\eta \Rightarrow \Gamma_\mu \neq \Gamma_\eta$. Além disso, se a e b são representantes de $\overline{v}$ e $\overline{w}$, respectivamente e $\eta = a \times b$, Γ_μ não passa por a e b.

Isto implica que as imagens de a e b pela projeção ψ não pertencem a $r_{\overline{\mu}} \Rightarrow \psi(a) = \overline{v} \notin r_{\overline{\mu}}$ *e* $\psi(b) = \overline{w} \notin r_{\overline{\mu}} \Rightarrow$ contradição!

Logo r_η é única. □

Proposição 2.3.3. (Concorrência de Duas Retas) *Duas retas projetivas distintas, $\overline{\eta}$, $\overline{\nu} \in \mathbb{RP}^{2^*}$ têm um único ponto em comum, a saber,*

$$\overline{v} = \overline{\eta \times \nu} \in \mathbb{RP}^2$$

Diz-se que três pontos $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w} \in \mathbb{RP}^2$ são colineares se existe uma reta projetiva incidindo sobre eles.

Proposição 2.3.4. (Equação de Colinearidade para Três Pontos) *Dados três pontos $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w} \in \mathbb{RP}^2$ temos*

$$\overline{u},\ \overline{v},\ \overline{w} \textit{ são colineares se, e somente se, } det\,[u, v, w] = 0$$

Demonstração. Sejam $\overline{u} \neq \overline{v} \neq \overline{w} \in \mathbb{RP}^2$. Então $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ são colineares $\Leftrightarrow \exists\ r_{\overline{\eta}}$ incidindo sobre eles $\Leftrightarrow \exists\ \Gamma_\eta$ (contendo a origem) tal que $\Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2 = r_\eta$ e $\psi_0(r_\eta)$ contém estes pontos.

Isto ocorre, se, e somente se, Γ_η contém os representantes das classes dos três pontos projetivos, $u,\ v,\ w$ que obviamente são **não nulos** e **não colineares**.

Observe que $v,\ w \in \Gamma_\eta \Leftrightarrow (v \times w) \perp \Gamma_\eta \Leftrightarrow \eta = v \times w$ (*ou* $\lambda(v \times w)$) e neste contexto, $u \in \Gamma_\eta \Leftrightarrow \langle u, \eta \rangle = 0$.

Portanto, $u,\ v,\ w \in \Gamma_\eta \Leftrightarrow \langle u, v \times w \rangle = 0 \Leftrightarrow det[u, v, w] = 0$.

□

Proposição 2.3.5. (Equação de Concorrência para Três Retas) *Dadas três retas projetivas $\overline{\eta}$, $\overline{\mu}$, $\overline{\nu} \in \mathbb{RP}^{2^*}$, temos*

$$\textit{as retas } \overline{\eta},\ \overline{\mu},\ \overline{\nu} \textit{ são concorrentes se, e somente se, } det\,[\eta, \mu, \nu] = 0$$

• Uma reta projetiva menos um de seus pontos é um modelo de uma reta euclidiana.

2.4 Geometria Afim

Qualquer resultado demonstrado na Geometria Afim permanece válido na Geometria Euclidiana, não sendo válida a afirmação oposta. O termo "afim" foi introduzido pelo matemático suiço Leonard Euler (1707-1783). Euler nasceu em Basiléia, e estudou com Johann Bernoulli. Apesar do fato de ter sido pai de mais de vinte filhos e ficado cego aos 50 anos, foi um matemático prolífico, tendo produzido mais de oitocentos trabalhos e livros, com contribuições fundamentais em todas as áreas da Matemática.

Convidado pela czarina Catarina, a grande, para trabalhar na sua corte, imprimiu sua personalidade científica na matemática russa, influência que perdura até os dias atuais. Lá não existe uma separação nítida entre Matemática pura e Matemática aplicada como estamos acostumados a fazer no ocidente.

Na axiomatização da Geometria Afim, eliminamos apenas o grupo de Congruência do sistema axiomático de Hilbert, o restante permanece igual ao proposto.

Axiomas

I. Termos Indefinidos
1. Ponto, reta, plano, pertence, está entre.

II. Axiomas de Incidência

III. Axiomas de Ordem

V. Axioma das Paralelas

VI. Axiomas de Continuidade

2.4.1 Plano Afim

Trataremos de Geometria Afim a partir dos conceitos que já conhecemos de Geometria Projetiva.

Seja $\Pi : z = 1 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, o plano paralelo ao plano xy, tangente a $\mathbb{S}^2$ no pólo norte, $p_n = (0, 0, 1)$.

Podemos identificar naturalmente o plano $\mathbb{R}^2$ com o plano Π

$$(x, y) \longleftrightarrow (x, y, 1)$$

Cada ponto $(x, y, 1) \in \Pi \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ determina um único ponto em $\mathbb{RP}^2$, $(x : y : 1)$. Considere

$$\mathbb{AP}^2 = \left\{(x : y : 1) \in \mathbb{RP}^2 : (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

- Chamaremos $\mathbb{AP}^2$ de plano afim e seus elementos de pontos afins.

Observe que qualquer ponto $\overline{v} = (x : y : z)$ do plano projetivo com a terceira coordena homogênea não nula, $z \neq 0$ pertence ao plano afim, pois $\overline{v}$ pode ser representado por $(\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1)$ e $\overline{v}$ corresponde ao ponto $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) \in \mathbb{R}^2$. Chamaremos esta identificação de *identificação afim.*

Essencialmente, o plano afim é o plano projetivo menos a reta ideal I_∞, ou seja, podemos pensar no plano afim como o hemisfério norte de $\mathbb{S}^2$ sem o equador. Como a reta ideal é a reta projetiva $r_{\overline{\eta}}$, onde $\overline{\eta} = (0, 0, 1)$ podemos definir o plano projetivo também na forma

$$\mathbb{AP}^2 = \left\{(u_1 : u_2 : u_3) \in \mathbb{RP}^2 : u_3 \neq 0\right\}$$

2.4.2 Retas Afim

- Chamaremos de reta afim a interseção de uma reta projetiva com o plano afim.

Como qualquer reta projetiva intercepta a reta ideal I_∞ num único ponto, segue que uma reta afim é uma reta projetiva menos o seu ponto ideal e será denotada por $r_{\overline{\eta}} \subset \mathbb{AP}^2$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, com $\eta_3 \neq 0$.

Proposição 2.4.1. *A identificação de $\mathbb{R}^2$ com o plano afim $\mathbb{AP}^2$ transforma a reta euclidiana $l : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 = 0$ na reta afim $r_{\overline{\eta}}$, onde $\overline{\eta} = (\eta_1 : \eta_2 : \eta_3)$.*

Demonstração. Seja $l \subset \mathbb{R}^2$ uma reta com vetor normal $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ e passando pelo ponto $p = (p_1, p_2)$, dada pela equação

$$l : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 = 0, \text{ onde } \eta_3 = -\langle p, \eta\rangle$$

Podemos identificar a reta l com uma reta s contida em Π, usando a identificação já citada no texto. Por outro lado, sabemos que qualquer reta no $\mathbb{R}^3$ é interseção de dois planos. Assim, $s = \Pi \cap \Gamma$. No entanto, existem infinitos planos Γ que interceptados com Π determinam s, mas somente um contém a origem $\Gamma_\eta : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = 0$, onde $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ é o vetor normal. Portanto, $s = \Pi \cap \Gamma_\eta$.

Ao projetarmos os pontos de s sobre $\mathbb{AP}^2$, obtemos $r_{\overline{\eta}}$, com $\overline{\eta} = (\eta_1 : \eta_2 : \eta_3)$

$\square$

É interessante citar que tal identificação nos permite calcular interseção de retas, equação de retas por dois pontos, determinar se duas são paralelas, etc. de forma mais prática. Para exemplos, consulte [1].

É importante observar que, uma vez que podemos pensar no plano afim como o hemisfério norte de $\mathbb{S}^2$ sem o equador, podemos induzir sobre ele a métrica elíptica. Com esta métrica obtemos segmentos com medidas iguais, porém que não podem ser colocados em correspondência biunívoca utilizando isometrias de $\mathbb{S}^2$. Isto é, não podemos estabelecer relações de congruência entre esses segmentos. O mesmo ocorre com triângulos.

Capítulo 3

Teorema de Menelau

Menelau de Alexandria viveu por volta do ano 100 d.C., na Grécia. Têon, comentador de Alexandria, menciona que Menelau escreveu seis livros sobre cordas de um círculo, além de muitos outros trabalhos que se perderam. Três livros de seu tratado *Sphaerica* se preservaram, em árabe.

O livro II trata de astronomia, mas nos livros I e III encontra-se a primeira definição de *triângulo esférico*. O trabalho procura demonstrar a validade de várias proposições de Euclides sobre triângulos planos para o caso esférico. Além disso, demonstra que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é menor que 180°.

No livro III encontra-se o Teorema de Menelau, que enunciamos logo após a seguinte

Definição 3.0.1. *Um ponto que se situa em uma reta pelo lado de um triângulo, mas que não coincide com nenhum dos vértices do triângulo, chama-se ponto de Menelau do triângulo relativamente a este lado.*

Teorema 3.0.1. (Teorema de Menelau) *Considere o triângulo $\triangle ABC$. Seja l uma reta que intersecciona os lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ (ou seus prolongamentos) em três pontos distintos P, Q, R, respectivamente. Então:*

$$\frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA} = -1$$

Demonstração. (1) Pelo Teorema Fundamental da Geometria Afim [1], sabemos que existe uma transformação afim t que leva os pontos A, B, C sobre

[1]Esta demonstração utiliza conceitos não apresentados aqui. Optamos por incluí-la com o objetivo de despertar a curiosidade do leitor. Recomendamos a leitura do capítulo 2 da referência [2] ou do capítulo sobre Geometria Afim, do trabalho "Geometria no Plural - A visão de Klein", já citado, para uma melhor compreensão desta demonstração.

os pontos $A^{'} = (0,1), B^{'} = (0,0), C^{'} = (1,0)$, respectivamente e a reta l à alguma reta $l^{'}$. O triângulo $\triangle A^{'}B^{'}C^{'}$ é retângulo em B. Seja $l^{'} : y = mx+c$.

Calculamos as coordenadas dos pontos $P^{'}, Q^{'}, R^{'}$ onde $l^{'}$ intersecciona os lados $\overline{B^{'}C^{'}}, \overline{C^{'}A^{'}}, \overline{A^{'}B^{'}}$, respectivamente.

Obtemos, $P^{'} = \left(\frac{-c}{m}, 0\right), R^{'} = (0,c)$ e $Q^{'} = \left(\frac{1-c}{m+1}, \frac{m+c}{m+1}\right)$.

Calculamos:

$\frac{A^{'}R^{'}}{R^{'}B^{'}} = \frac{c-1}{0-c} = \frac{c-1}{-c}$

$\frac{B^{'}P^{'}}{P^{'}C^{'}} = \frac{\frac{-c}{m}-0}{1+\frac{c}{m}} = \frac{-c}{m+c}$

$\frac{C^{'}Q^{'}}{Q^{'}A^{'}} = \frac{\frac{1-c}{m+1}-1}{0-\frac{1-c}{m+1}} = \frac{-(m+c)}{c-1}$

Segue que

$$\frac{A^{'}R^{'}}{R^{'}B^{'}}\frac{B^{'}P^{'}}{P^{'}C^{'}}\frac{C^{'}Q^{'}}{Q^{'}A^{'}} = -1$$

Como t^{-1} é uma transformação afim, preserva proporção ao longo de retas, portanto leva os pontos $P^{'}, Q^{'}, R^{'}$ devolta aos originais P, Q, R, de tal forma que

$$\frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA} = -1$$

como queríamos.

□

É possível também demonstrar este Teorema traçando pelos vértices A, B, C perpendiculares à reta l, $\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{BY}, \overrightarrow{CZ}$, respectivamente. Estas semiretas serão paralelas entre si, portanto pode-se aplicar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade da Geometria Euclidiana Plana. Como mostraremos na demonstração a seguir:

Demonstração. (2) Sabemos que os pontos P, Q, R são colineares. Baixamos perpendiculares $\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{BY}, \overrightarrow{CZ}$, sobre a reta l, a partir de A, B, C, respectivamente.

Aplicando semelhança de triângulos e desprezando os sinais, temos

$$\frac{AR}{RB} = \frac{AX}{BY}, \qquad \frac{BP}{PC} = \frac{BY}{CZ}, \qquad \frac{CQ}{QA} = \frac{CZ}{AX}$$

Resulta que

$$\frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA} = \pm 1$$

Contudo, uma vez que há apenas duas possibilidades - ou a reta l corta apenas um dos três lados do triângulo externamente ou corta os três lados externamente - temos apenas a possibilidade de sinal negativo para o resultado da igualdade acima, como queríamos.

$\square$

A volta do Teorema de Menelau, também vale, como mostra o Teorema abaixo.

Teorema 3.0.2. (Teorema de Menelau - Recíproca) *Sejam P, Q, R pontos pertencentes aos lados $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$, diferente dos vértices, de um $\triangle ABC$, tais que*

$$\frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA} = -1$$

Então P, Q, R são colineares.

Demonstração. A demonstração é baseada na demonstração (2) do Teorema de Menelau.

Por hipótese, vale

$$\frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA} = -1$$

Podemos supor a reta $\overleftrightarrow{QR}$ é não paralela ao lado $\overline{BC}$. Então ela o intersecciona em algum ponto $P^{'}$. Por definição, $P^{'}$ é ponto de Menelau do lado $\overline{BC}$. Logo, podemos aplicar o Teorema de Menelau aos pontos $P^{'}, Q, R$, colineares. Temos:

$$\frac{AR}{RB}\frac{BP^{'}}{P^{'}C}\frac{CQ}{QA} = -1$$

Segue que $\frac{BP^{'}}{P^{'}C} = \frac{BP}{PC} \Rightarrow P^{'} = P$. Ou seja, P, Q, R são colineares. $\square$

A partir da Forma Trigonométrica do Teorema de Menelau, que enunciamos a seguir, o matemático estendeu suas descobertas para o caso esférico.

Encerramos nosso trabalho apresentando estes resultados.

Proposição 3.0.2. *Ligando-se o vértice A de um triângulo ABC ao ponto D (distinto de B e de C) da reta $\overleftrightarrow{BC}$, temos*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB sen\widehat{BAD}}{AC sen\widehat{DAC}}$$

Demonstração. Seja h o comprimento da altura baixada do vértice A sobre o lado $\overline{BC}$. Então temos:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{h}{h}\frac{BD}{DC} = \frac{2\text{Área}(\triangle ABD)}{2\text{Área}(\triangle ADC)} \underset{(*)}{=} \frac{(AB)[(AD)sen\widehat{BAD}]}{(AC)[(AD)sen\widehat{DAC}]} = \frac{ABsen\widehat{BAD}}{ACsen\widehat{DAC}}$$

(*) No numerador, temos 2Área$(\triangle ABD)$ = base $\times$ altura. Considere a base $\overline{AB}$. Seja h_1 a altura pelo vértice D sobre o lado $\overline{AB}$. Então, $sen\widehat{BAD} = \frac{h_1}{AD} \Rightarrow h_1 = (AD)sen\widehat{BAD}$. O raciocínio é análogo para o denominador. □

Teorema 3.0.3. (Forma Trigonométrica do Teorema de Menelau) *Sejam P, Q, R pontos de Menelau relativos aos lados BC, CA, AB de um triângulo ABC. Então, P, Q, R pertencem a uma reta, se, e somente se,*

$$\frac{sen\widehat{BAP}}{sen\widehat{PAC}}\frac{sen\widehat{CBQ}}{sen\widehat{QBA}}\frac{sen\widehat{ACR}}{sen\widehat{RCB}} = -1$$

Demonstração. Pela Proposição anterior temos:

$$\frac{BP}{PC} = \frac{ABsen\widehat{BAP}}{ACsen\widehat{PAC}}$$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{BCsen\widehat{CBQ}}{BAsen\widehat{QBA}}$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{CAsen\widehat{ACR}}{CBsen\widehat{RCB}}$$

Decorre que

$$\left(\frac{sen\widehat{BAP}}{sen\widehat{PAC}}\right)\left(\frac{sen\widehat{CBQ}}{sen\widehat{QBA}}\right)\left(\frac{sen\widehat{ACR}}{sen\widehat{RCB}}\right) = -1$$

se, e somente se

$$\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}\frac{AR}{RB} = -1$$

O que completa a prova. □

Teorema 3.0.4. *Sejam P, Q, R pontos de Menelau relativos aos lados BC, CA, AB de um triângulo ABC e seja O um ponto do espaço, fora do plano do triângulo ABC. Então os pontos P, Q, R são colineares se, e somente se,*

$$\frac{sen\widehat{BOP}}{sen\widehat{POC}}\frac{sen\widehat{COQ}}{sen\widehat{QOA}}\frac{sen\widehat{AOR}}{sen\widehat{ROB}} = -1$$

Demonstração. Sabemos que pelos pontos OAB passa um plano, Γ_{OAB}, portanto temos um triângulo plano $\triangle OAB$. Consideramos ainda a reta $\overrightarrow{OR} \subset \Gamma_{OAB}$, e aplicamos a Proposio 3.0.2

$$\frac{AR}{RB} = \frac{OAsen\widehat{AOR}}{OBsen\widehat{BOR}}$$

Fazendo o mesmo para os triângulos $\triangle OAC$ e $\triangle OBC$, considerando as retas $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{OP}$ respectivamente, obtemos mais duas equações. Das trs equaes resulta o que queremos provar. Verifique! □

Teorema 3.0.5. *Sejam $P^{'}, Q^{'}, R^{'}$ pontos de Menelau relativos aos lados $B^{'}C^{'}, C^{'}A^{'}, A^{'}B^{'}$ de um triângulo esférico $\triangle A^{'}B^{'}C^{'}$. Então $P^{'}, Q^{'}, R^{'}$ pertencem a uma circunferência máxima da esfera (isto é equivalente a dizer que são colineares na geometria esférica) se, e somente se,*

$$\frac{senB^{'}P^{'}}{senP^{'}C^{'}}\frac{senC^{'}Q^{'}}{senQ^{'}A^{'}}\frac{senA^{'}R^{'}}{senR^{'}B^{'}} = -1$$

Demonstração. Seja O o centro da esfera $\mathbb{S}^2$ em cuja superfície se encontra o triângulo $\triangle A^{'}B^{'}C^{'}$. Se notarmos que

$$\frac{senB^{'}P^{'}}{senP^{'}C^{'}} = \frac{sen\widehat{B^{'}OP^{'}}}{sen\widehat{P^{'}OC^{'}}}$$

$$\frac{senC^{'}Q^{'}}{senQ^{'}A^{'}} = \frac{sen\widehat{C^{'}OQ^{'}}}{sen\widehat{Q^{'}OA^{'}}}$$

$$\frac{senA^{'}R^{'}}{senR^{'}B^{'}} = \frac{sen\widehat{A^{'}OR^{'}}}{sen\widehat{R^{'}OB^{'}}}$$

então o resultado segue imediatamente do Teorema anterior. Conclua a demonstração. □

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, Plácido Francisco de Assis & BARROS, Abdênago Alves de, *Introduação à Geometria Projetiva*, XIII Escola de Geometria Diferencial, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 26 a 30 de julho de 2004.

[2] BRANNAN, David A., Esplen, Matthew F. & Gray, Jeremy J., *Geometry*, University Press, Cambridge, UK, 1999.

[3] EVES, Howard, *A Survey of Geometry*, Allyn and Bacon Inc., Boston, USA, 1974.

[4] EVES, Howard, *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp, Campinas, SP, 2004.